EDPs y series de Fourier *Curso 2017/18*

Hoja 2: La ecuación del calor

1. En la deducción de la ecuación del calor en un sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ utilizamos varias magnitudes físicas. Sabiendo que el flujo $\vec{\mathbf{\Phi}}$ tiene unidades de watios/superficie (donde $[W] = [J/\text{seg}]$), y que las de σ (calor específico volumétrico) son $[J/({}^\circ k\,\text{Vol})]$, encuentra las unidades de las constantes κ (conductividad térmica) y $\alpha = \kappa/\sigma$ (difusividad térmica).

2. En clase resolvimos la ecuación del calor en una varilla con extremos aislados

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

para la temperatura inicial $u(0,x) = \sin^2(\pi x)$ y $\alpha = 1$. Supón ahora que $\alpha = 0'1$. Encuentra la solución $u(t,x)$ en este caso, esboza su gráfica para varios valores de t, y determina a partir de qué valor de t se tiene $|u(t,x) - \frac{1}{2}| < 0'001$, $\forall\, x$. En general, ¿qué papel juega el coeficiente α?, ¿cómo afecta a la rapidez con que se alcanza el equilibrio térmico?

3. Resuelve la ecuación del calor en una varilla con extremos nulos

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Si $\alpha = L = 1$, encuentra una fórmula explícita para $u(t,x)$ cuando $f(x) = \sin(\pi x)$, esboza su gráfica y determina cuándo es $|u(t,x)| < 0'001$.

b) Trata de encontrar una fórmula explícita cuando $f(x) = 1$, y si es posible, esboza una gráfica (aproximada) de $u(t,x)$.

Sugerencia: En b), intenta escribir $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$, $x \in (0,1)$, para ciertos coeficientes b_n que puedes determinar como en clase...

4. Ecuación del calor en una varilla con extremos no homogéneos

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = \mathtt{T}_0, \quad u(t,L) = \mathtt{T}_1, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Encuentra primero una solución particular del tipo $\bar{u}(x)$.

b) Utiliza a) y la solución del ejercicio 3 para encontrar una solución en forma de serie trigonométrica. Determina una fórmula para los coeficientes si imponemos el dato inicial $u(0,x) = f(x)$.

c) Si $\alpha = L = 1$, determina la solución $u(t,x)$ cuando $\mathtt{T}_0 = 20, \mathtt{T}_1 = 0$ y $f(x) = 0$.

5. *Reacción en cadena para partículas confinadas en un dominio* Ω. En las reacciones nucleares de fisión, la densidad de neutrones $u(t,x)$, en un punto $x \in \Omega$ y en tiempo t, cumple la EDP

$$u_t = \mathtt{D}\Delta u \,+\, \alpha u, \quad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

para ciertos parámetros $\mathtt{D} > 0$ (difusión del material) y $\alpha > 0$ (tasa creación de neutrones/choque). Suponer que las particulas están confinadas en una varilla unidimensional $\Omega = (-R,R)$.

a) Utiliza separación de variables para encontrar una solución general de la EDP en este caso.

b) Demuestra que puede haber reacción en cadena (es decir, soluciones no acotadas en t) cuando R es mayor que el radio crítico $R_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathtt{D}}{\alpha}}$.

c) Encuentra una solución explícita cuando $u(0,x) = \cos(\frac{\pi x}{2R})$, y esboza aproximadamente su gráfica cuando $R > R_c$.

6. Ecuación del calor en una varilla con extremos mixtos.

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x(t,0) = \gamma u(t,0), \quad u_x(t,L) = 0, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Interpreta el significado físico de las condiciones de contorno. ¿Qué debería ocurrir cuando $t \to \infty$?

b) Mediante separación de variables, encuentra una solución general de la EDP en forma de serie trigonométrica.

Sugerencia: En a) recuerda que, según la ley de Fourier, $-u_x$ representa el flujo de calor.

7. Suponer dos grandes depósitos de agua salada conectados por un fino tubo de longitud L. Sea $u(t,x)$ la concentración de sal en el punto x del tubo en tiempo t, que supondremos que cumple la ley de Fick, es decir

$$u_t = D\, u_{xx},$$

para una cierta constante $D > 0$. Se pide describir con una fórmula matemática las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

a) El tubo tiene inicialmente agua pura, y las concentraciones en los depósitos se mantienen constantes q_1 y q_2.

b) Suponer que $q_2 = 0$ y que para $t \geq 0$ colocamos un filtro que no deja pasar más sal del primer depósito al tubo. Además, en el instante $t = 0$ la concentración en el tubo es una función que decrece linealmente desde q_1 hasta 0.

8. Considera la EDP

$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0. \tag{P}$$

a) ¿A qué problema físico corresponde? ¿Qué significan las condiciones en los extremos?

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Si $\alpha = L = 1$, resuelve (P) cuando $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$, y esboza la gráfica de la solución. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿A partir de qué valor de t es $u(t,x) \leq 0'001$, $\forall\, x$?