

Hoja 3: La ecuación de Laplace

1. (i) Demuestra que $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 (ii) Demuestra que $u(x) = |x|^{-a}$, $a \neq 0$, es armónica en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, si y sólo si $a = d - 2$.
 (iii) Encuentra todos los polinomios homogéneos armónicos de grado 2 en \mathbb{R}^3 . ¿Qué dimensión tiene el correspondiente espacio vectorial? ¿Te atreves con los de grado 3?
2. Encuentra una solución general (en forma de serie trigonométrica) para el problema de Neumann en el disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{D}, \quad \text{con } \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathbb{D}} \equiv \varphi$$

Demuestra en particular, que para que exista solución es necesario que $\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi = 0$.

3. Considera la ecuación $\Delta u(x, y) = 0$ en el rectángulo $[0, 1] \times [0, L]$, cuando las condiciones de contorno son: lados aislados cuando $x \in \{0, 1\}$, temperatura nula si $y = 0$, y temperatura fija $f(x)$ en el lado restante $y = L$.
 - a) Escribe las condiciones de contorno en términos de la función $u(x, y)$
 - b) Encuentra la solución general de la EDP, dando una fórmula para los coeficientes
 - c) Encuentra una solución explícita cuando $f(x) = T_0 + T_1 \sin^2(\pi x)$
 - d) Esboza con *Maxima* la gráfica de c) cuando $L = 1$, $T_0 = 20$, $T_1 = 15$. ¿Sabrías describir qué le ocurre al calor que entra por el lado superior?
4. Considera la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ en un rectángulo infinito $R = [0, 1] \times [0, \infty)$, con condiciones de contorno nulas en los lados verticales $u(0, y) = u(1, y) \equiv 0$, con $u(x, 0) = f(x)$ y **acotada** cuando $y \rightarrow \infty$.
 - a) Encuentra una solución general para esta ecuación, y una fórmula para los coeficientes.
 - b) Escribe la solución en forma de serie cuando $f(x) = T_0$.
5. Escribe la EDP y las condiciones de contorno para la temperatura en el equilibrio $u(x, y)$ en una placa rectangular $[0, L] \times [0, M]$ con las siguientes hipótesis: los lados superior e inferior están aislados; por el lado vertical izquierdo entra un flujo constante de calor Φ_0 , y por el lado vertical derecho sale un flujo de calor proporcional a la diferencia entre la temperatura interior y exterior, siendo esta última 0°C .

Sugerencia: Ver Churchill-Brown; Ejemplo 24.1.

6. Demuestra que si u es armónica en un anillo $D(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\} \subset \mathbb{C}$, entonces también son armónicas las rotaciones $R_\psi u$, $\psi \in \mathbb{R}$, definidas por $(R_\psi u)(z) = u(e^{i\psi} z)$.

Sugerencia: Escribe el laplaciano en coordenadas polares.

7. *Contraejemplo de Zaremba:* Demuestra que el problema de Dirichlet en $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \quad \text{con } u|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0 \text{ y } u(0) = 1, \quad (\text{Z})$$

no tiene ninguna solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Para ello procede como sigue:

- (i) Demuestra que a lo sumo puede existir una solución, y que es necesariamente radial.
- (ii) Calcula todas las soluciones de la ODE $v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = 0$ si $r \in (0, 1)$
- (iii) Utiliza (i) y (ii) para probar que la solución de (Z) no puede ser continua en el origen.

Sugerencia: En (i) puedes utilizar el ejercicio 6 y el teorema de unicidad

8. Demuestra que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es solución de la EDP indicada si y sólo si

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w),$$

donde el funcional de energía E aparece indicado, y debes determinar quién es la clase \mathcal{A}

a) *Ecuación de Poisson* $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + fu$

b) *Problema de Neumann* $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, donde $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} \varphi u$

9. Sea $\mathcal{A} = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$. Demuestra que $u \in \mathcal{A}$ cumple

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} E(w), \quad \text{con} \quad E(w) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla w|^2},$$

si y sólo si $u(x)$ cumple la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

10. Sea $1 < p < \infty$ y sea \mathcal{A} como en el ejercicio anterior. Determina qué EDP corresponde a minimizar el funcional de energía

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \quad u \in \mathcal{A}.$$

11. Sea Ω un dominio de clase C^1 . Si $u \in \mathcal{H}ar(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ demuestra que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

Sugerencia: utiliza la primera fórmula de Green con una función v adecuada.

Ejercicios opcionales:

12. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluciones respectivas de

$$\begin{cases} \Delta u_1 = F_1 & \text{en } \Omega \\ u_1|_{\partial\Omega} = \varphi_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = F_2 & \text{en } \Omega \\ u_2|_{\partial\Omega} = \varphi_2 \end{cases}$$

Demuestra que se tiene la siguiente estimación de regularidad

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + c_\Omega \|F_1 - F_2\|_{L^\infty(\Omega)},$$

donde c_Ω es una constante positiva.

Sugerencia: aplica el principio del máximo a $v(x) := u_1(x) - u_2(x) + \frac{M|x|^2}{2n}$, donde $M = \|F_1 - F_2\|_\infty$.