Hoja 4: Series de Fourier

1. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones de $L^1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, esbozando sus gráficas y estableciendo en qué puntos se tiene convergencia:

   (a) $f(x) = |x|$

   (b) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + \cos^2(2\pi x)$

   (c) $f(x) = |\operatorname{sen}(2\pi x)|$

   (d) $f(x) = e^{ax}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \operatorname{sen}(2\pi x) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$

   (f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$

   (g) $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{si } \varepsilon < |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$

   (h) $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\varepsilon} & \text{si } |x| \le \varepsilon \\ 0 & \text{si } \varepsilon < |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$

   Nota: Una tabla de soluciones aparece en el libro de Folland "*Fourier Analysis*", pág. 26.

2. Dado un número $\alpha \notin \mathbb{Z}$: (i) demuestra (justificando el tipo de convergencia) que

$$e^{-i\alpha x} = c_\alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} e^{inx}, \quad |x| < \pi,$$

   para una constante c_α apropiada. ¿Qué ocurre cuando $x = \pm\pi$?

   (ii) Dando valores adecuados a x demuestra las fórmulas

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{\tan(\pi\alpha)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha+n}.$$

   (iii) Utilizando Parseval, demuestra la fórmula

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi\alpha)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+n)^2}.$$

3. Sabiendo que $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \operatorname{sen}(2\pi nx)$, para $|x| < 1/2$

   (i) hallar la serie de Fourier de x^2 en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, estableciendo el tipo de convergencia

   (ii) calcula las siguientes sumas

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

   (iii) aplicando Parseval a la función x^2, calcula las sumas

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

4. Sabiendo que $|x| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{\cos[(2k+1)2\pi x]}{(2k+1)^2}$, para $|x| < 1/2$, demuestra que

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}.$$

   Sugerencia: Integra la serie de $|x|$ un número suficiente de veces.

5. *Series de Fourier reales:* Si $f \in L^1[0,1)$, podemos formalmente escribir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)\big].$$

a) Expresa a_n y b_n en términos de $\hat{f}(n)$, y viceversa

b) Demuestra que $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx$ y encuentra una fórmula similar para a_n.

6. *Series de funciones reales, pares e impares.* Sea $f \in L^1[-\frac12, \frac12)$.

(i) Demuestra que f es real si y sólo si $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Demuestra que f es real si y sólo si los coeficientes a_n, b_n del ejercicio 5 son reales.

(iii) Caracteriza los coeficientes de Fourier $\hat{f}(n), a_n, b_n$ para las funciones pares.

(iv) Ídem para las funciones impares.

7. *Suavidad de f implica decaimiento de $\hat{f}$.* Demostrar que si $f \in C^k_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$, entonces

$$\hat{f}(n) = o(1/|n|^k), \quad \text{para } |n| \to \infty.$$

Sugerencia: Utiliza integración por partes y el lema de Riemann-Lebesgue.

8. *Decaimiento de $\hat{f}$ implica suavidad de f:* Demuestra que si $f \in L^1[0,1)$ es tal que $\widehat{f}(n) = O(1/|n|^{k+2})$ para $|n| \to \infty$, entonces $f \in C^k_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$.

Nota: Necesitarás citar algún resultado sobre funciones de una variable, que garantice que $\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$; ver el libro de Spivak.

9. (i) *Fórmula de sumación por partes*: si $S_k = s_0 + s_1 + \ldots + s_k$, demuestra que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s_k = a_N S_N - \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) S_k.$$

(ii) *Criterio de Dirichlet*: demuestra que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n$ es convergente cuando

$$a_n \searrow 0, \quad \text{y} \quad \{s_n\} \quad \text{tiene sumas parciales acotadas}$$

(iii) Demostrar la convergencia de $1 - \frac12 - \frac13 + \frac14 + \frac15 - \frac16 - \frac17 + \ldots$ y $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots$.

Nota: En (iii) hay que justificar que las sumas parciales $|\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) + \ldots + \operatorname{sen}(nx)|$ están acotadas en n (puedes usar series geométricas para calcular esta expresión).

10. (i) Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \sin(2\pi n x)$ es convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Demostrar que la serie en (i) no es la serie de Fourier de ninguna función integrable.

Sugerencia: En (ii) utiliza el teorema de integración término a término de series de Fourier.

11. *La desigualdad de Wirtinger:* Sea f una función T-periódica y de clase C^1.

(i) Si la media $\int_0^T f = 0$, demuestra que

$$\|f\|_{L^2[0,T)} \le \tfrac{T}{2\pi} \|f'\|_{L^2[0,T)}.$$

(ii) Si $f(0) = f(T) = 0$, demuestra que

$$\|f\|_{L^2[0,T)} \le \tfrac{T}{\pi} \|f'\|_{L^2[0,T)}.$$

(iii) ¿Sabrías decir para qué funciones se tiene la igualdad en cada caso?

Sugerencia: En (i) utiliza Parseval. En (ii), extiende f de modo impar a $[-T,T]$ y utiliza (i), apropiadamente adaptado a funciones $2T$-periódicas.