Hoja 5: Convoluciones, núcleos de Dirichlet y Féjer

1. Si $f = \chi_{[0,a]}$, calcula la convolución $(f * f)(x)$ y dibuja su gráfica.

2. (i) Sean $K, f \in L^1$. Demuestra que si K es acotada, entonces $K * f(x)$ es continua en todo x (y también acotada).

   (ii) Encuentra ejemplos de $f, g \in L^1$ tales que $f * g$ no es continua, e incluso $f * g(x_0) = \infty$ en algún punto x_0.

   Nota: En (ii) intentar con $f(x) = g(x) = 1/|x|^\alpha$, $0 < |x| \leq 1/2$, para una potencia α apropiada.

3. Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_\mathbb{R} K(x)dx = 1$. Demuestra que $\{K_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} K(x/\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ es una aproximación de la identidad, para toda sucesión $\varepsilon_n \searrow 0$.

4. Demuestra que $\sum_{n=1}^N \cos\big((2n-1)t\big) = \sin(2Nt)/[2\sin t]$.

5. (i) Si $|x| \leq \pi/2$, demuestra que
$$\int_0^x \frac{\sin(Rt)}{\sin t}\, dt \;=\; \int_0^x \frac{\sin(Rt)}{t}\, dt \;+\; E_R(x),$$
   donde $|E_R(x)| \leq C/R$, para todo $|x| \leq \pi/2$ y para todo $R \geq 1$.

   (ii) Utiliza (i) para probar el siguiente lema de clase: si $|x| \leq 1/2$
$$\int_0^x D_N(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi x} \frac{\sin t}{t}\, dt \;+\; \mathcal{O}(1/N), \qquad \text{si} \quad N \to \infty.$$

   (iii) Sabiendo que existe $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t}\, dt$, calcula su valor a partir de (ii).

   Sugerencia: En (i) utiliza que $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ es de clase C^1, e integración por partes.

6. (i) Si $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)]$, demuestra que
$$\sigma_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \Big(1 - \frac{n}{N}\Big)\big[a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)\big].$$

   (ii) Deduce de (i) y del teorema de Féjer, que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y **real**, entonces se puede aproximar uniformemente por polinomios reales.

7. Utiliza Parseval para probar

   (i) $\|D_N\|_{L^2}^2 = 2N+1$

   (ii) $\|F_N\|_{L^2}^2 \approx N$.

8. **Núcleos de de la Vallée-Poussin.** Definimos: $V_N = 2F_{2N} - F_N$, $N = 1, 2, \ldots$

   (i) Demuestra que $V_N = [D_N + \ldots + D_{2N-1}]/N$.

   (ii) Demuestra que $\{V_N\}_{N\geq 1}$ es una aproximación de la identidad.

   (iii) Calcula los coeficientes de Fourier $\widehat{V}_N(n)$, y esboza su gráfica.

   (iv) ¿Son los núcleos $V_N(x) \geq 0$? Esboza la gráfica para algunos valores de N.