EDPs y Series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES **Examen junio 2018**

Nombre y DNI:

. . . .

1. Escoge dos de las siguientes propiedades, y describe brevemente su significado, dando ejemplos de EDPs que las cumplan y aspectos que consideres destacados

   (a) Principio del máximo

   (b) Propiedad del valor medio

   (c) Conservación de la energía

   Demuestra con detalle al menos una de las propiedades escogidas.

   Nota: 2 ptos

2. a) Demuestra que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$, $x \in (0,1)$, con convergencia en la norma de $L^2(0,1)$, entonces

   $$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \quad \text{si } n \geq 1, \quad \text{y} \quad a_0 = ??$$

   b) Expresa $\int_0^1 |f(x)|^2\,dx$ como una suma adecuada de los coeficientes $|a_n|^2$

   c) Si $f(x) = \sin(\pi x)$ demuestra que $a_n = 0$ para n impar, $a_n = \frac{-4/\pi}{(n+1)(n-1)}$ para n par no nulo, y determina el valor de a_0.

   d) Utiliza los apartados anteriores para probar que

   $$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

   Sugerencia: en (c) puede ser útil la fórmula $2\,\mathrm{sen}\,A\cos B = \mathrm{sen}(A+B) + \mathrm{sen}(A-B)$.

   Nota: 3 ptos

3. Considera la ecuación ordinaria $U''(x) = \rho\, U(x)$, $x \in [0,1]$, con condiciones de contorno periódicas, es decir $U(0) = U(1)$ y $U'(0) = U'(1)$. Demuestra que:

   a) si $\rho > 0$, entonces sólo hay soluciones nulas

   b) si $\rho = -\lambda^2 \leq 0$, entonces hay soluciones no nulas si y sólo si $\lambda = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Nota: 2 ptos

4. Resuelve mediante separación de variables la ecuación

   $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u, & t > 0,\ x \in (0,\pi) \\ u(0,x) = 0, & x \in (0,\pi) \\ u_t(0,x) = 1 + \cos^3 x, & x \in (0,\pi) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

   Sugerencia: Puedes usar $\cos^3 x = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$.

   Nota: 2 ptos

5. **V ó F** (justifica tu respuesta)

   a) Si s_n converge a s en el sentido de Cesàro, entonces existe $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

   b) La familia de núcleos $K_N = (D_N + F_N)/2$ es una aproximación de la identidad regular.

   c) La serie de Fourier de la función $f(x) = 1/\log(1/|x|)$, $|x| \leq 1/2$, diverge en $x = 0$.

   d) Existen dominios Ω en $\mathbb{R}^2$ donde el problema de Dirichlet no tiene solución.

   Nota: 1 pto