EDPs y series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES   Test 1, 19/2/2018

Nombre: SOLUCIONES

9'8

1. Considera la EDP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & t>0,\ \ 0<x<\pi \\ u(0,x) = f(x), & \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. & \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

× a) Explica brevemente una interpretación física de (P).

× b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

× c) Escribe el valor de los coeficientes de la solución general como una integral que involucre a $f(x)$.

× d) Resuelve explícitamente el caso $f(x) = 80\operatorname{sen}^3 x$, y esboza la gráfica de la solución.

Sugerencia: En (d) puedes usar $4\operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)$.

b) Hay que encontrar soluciones de la forma $u(t,x) = T(t)\cdot U(x)$. Derivando y sustituyendo:

$$T'(t)\,U(x) = T(t)U''(x) - T(t)U(x) \Longrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} - 1 \equiv \text{cte} = p$$

Por un lado, $T'(t) = p\cdot T(t) \Longrightarrow T(t) = c\cdot e^{pt}$

Por otro lado, $\frac{U''(x)}{U(x)} - 1 = p \Longrightarrow U''(x) = (p+1)U(x) = \lambda U(x)$, donde $\lambda := p+1$. Distinguimos varios casos:

- Caso $\lambda = -\mu^2 < 0$:

Tenemos que $U''(x) = -\mu^2 U(x) \Longrightarrow$ La solución de la ecuación tiene la forma $U(x) = A\cdot\cos(\mu x) + B\cdot\operatorname{sen}(\mu x)$. Aplicamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} U(0) = 0 = A + 0 \Longrightarrow A = 0 \\ U(\pi) = 0 = 0 + B\cdot\operatorname{sen}(\mu\pi) \end{cases}$$

Como queremos encontrar soluciones no nulas, supongamos que $B \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}(\mu\pi) = 0 \Longrightarrow \mu\pi = n\pi$, con $n\in\mathbb{Z} \Longrightarrow \mu = n$, con $n = 0,1,2\ldots$

Siendo $\mu_n = n$, para $n = 0,1,2\ldots \Longrightarrow U_n(x) = B_n\cdot\operatorname{sen}(\mu_n x)$. Con lo cual, las soluciones no nulas encontradas en este caso son: $\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n^2+1)t}\cdot b_n\cdot\operatorname{sen}(nx)}$, siendo $0<x<\pi$ y $t>0$.

n=0 no aporta

Sabiendo que $\lambda = p+1 \Longleftrightarrow -\mu^2 = p+1 \Longleftrightarrow p = -(\mu^2+1)$, despejando.

- Caso $\lambda = 0$:

Tenemos que $U''(x) = 0 \Longrightarrow U'(x) = a \Longrightarrow U(x) = ax+b$. Aplicando las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} U(0) = 0 = b \Longrightarrow b = 0 \\ U(\pi) = 0 = a\pi \Longrightarrow a = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Las soluciones encontradas son nulas.}$$

- Caso $\lambda > 0$:

La solución de la ecuación tendrá la forma $u(x) = A \cdot \cosh(\sqrt{\lambda} x) + B \cdot \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda} x)$. Aplicamos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(0) = 0 = A \Rightarrow A = 0 \\ u(\pi) = 0 = A \cdot \cosh(\sqrt{\lambda}\pi) + B \cdot \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 + B \cdot \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\pi) \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Las soluciones encontradas en este caso también son nulas.

SOLUCIONES

c) Deducimos que $\kappa = 1$ y que $L = \pi$. Entonces:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx)\, dx, \quad \text{donde } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}(nx), \text{ siendo } 0 < x < \pi.$$ ✓

d) Sabemos, por el enunciado, que $4\operatorname{sen}^3 x = 3 \cdot \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)$.

Con lo cual, $f(x) = 80 \operatorname{sen}^3 x = 60 \operatorname{sen} x - 20 \operatorname{sen}(3x)$.

Para que $f(x)$ sea así, es necesario que $b_1 = 60$, $b_3 = -20$ y el resto de b_n sean nulos. Por lo tanto,

$u(t,x) = 60 \cdot e^{-2t} \cdot \operatorname{sen}(x) - 20 \cdot e^{-10t} \cdot \operatorname{sen}(3x)$ es la solución de la EDP.

✓

a) Se trata de un problema físico en una varilla de longitud π, que aplica la ecuación del calor. Además, dicha varilla posee extremos nulos. La difusividad térmica en (P) es $\kappa = 1$. ¿$-u$?

este término es un enfriamiento exponencial de la barra.

Representación gráfica pedida en d):