EDPs y series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES    Test 2, 12/3/2018

Nombre SOLUCIONES    10

1. Considera la ecuación de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$ en el rectángulo infinito $R = [0,1] \times [0,\infty)$, con lados verticales aislados $u_x(0,y) = u_x(1,y) \equiv 0$, y con un flujo en el lado inferior $u_y(x,0) = -\varphi(x)$, $0 < x < 1$. Suponer que el calor se distribuye de forma que $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ para todo $x \in (0,1)$.

a) Encuentra una solución general para esta ecuación

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes

c) Escribe la solución explícita cuando $\varphi(x) = 40\cos^3(\pi x)$. En este caso, describe por qué zonas del lado inferior entra o sale el flujo de calor

*Sugerencia:* En (c) puedes usar $4\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos(3\theta)$.

a) Buscamos la solución por separación de variables:

$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$. Con esto llegamos a la ecuación

$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$ con datos:

$$\begin{cases} X'(0) = X'(1) = 0 \\ \lim_{y\to\infty} Y(y) = 0. \end{cases}$$

Dividiendo por $u(x,y)$ obtenemos $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = cte = \rho$$

Por ser el primer miembro independiente de $y$ y el segundo de $x$.

Por tanto tenemos dos EDOs:

1 a) caso $\rho = \lambda^2 > 0$. $\Rightarrow X''(x) = \lambda^2 X(x) \Rightarrow X(x) = A\cosh(\lambda x) + B\operatorname{senh}(\lambda x)$

Aplicando los datos: $(X'(x) = \lambda A \operatorname{senh}(\lambda x) + \lambda B\cosh(\lambda x))$

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0. \\ X'(1) = \lambda A\operatorname{senh}(\lambda) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (\text{pues } \lambda \neq 0). \end{cases}$$

En este caso no obtenemos soluciones no nulas. ✓

b) Caso $\rho = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$, $X'(x) = A$.

$$\left.\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A = 0.$$ Obtenemos entonces la solución $X_0(x) = B_0$. ✓

c) Caso $\rho = -\lambda^2 < 0 \Rightarrow X''(x) = -\lambda^2 X(x) \Rightarrow X(x) = A\cos\lambda x + B \operatorname{sen}\lambda x$,

$X'(x) = -A\lambda \operatorname{sen}\lambda x + B\lambda\cos\lambda x$.

$$\begin{cases} X'(0) = 0 = B\lambda \Rightarrow B = 0 \\ X'(1) = 0 = -A\lambda\operatorname{sen}\lambda . \begin{cases} A\lambda = 0 \xRightarrow{\lambda\neq 0} A = 0 \text{ (solución idénticamente nula)} \\ \operatorname{sen}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases}$$

Como el caso $n=0$ lo hemos hecho en el (b) (y no entra en este) y los $n$ negativos repiten soluciones podemos tomar $\lambda = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

Obtenemos entonces:

$$X_n(x) = A_n\cos(n\pi x). \quad n = 1, 2, \ldots$$

(2) $Y''(y) = -\rho Y(y)$

Tenemos dos casos:

a) $\rho = 0 \Rightarrow Y''(y) = 0 \Rightarrow Y(y) = Ay + B$, pero

$\lim_{y\to\infty} Y(y) = 0 \Rightarrow A = B = 0$. $Y_0(y) = 0$.

b) $\rho = -\lambda^2 < 0 \Rightarrow Y''(y) = \lambda^2 Y(y) \Rightarrow Y(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}$ y

como $\lim_{y\to\infty} Y(y) = 0 \Rightarrow A = 0$. Como $\lambda = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$, queda

$$Y_n(y) = B_n e^{-\pi n y}$$

La solución general se obtiene como combinación de estas soluciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi n y}\cdot\cos(n\pi x)$$

b) $u_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n\pi b_n) e^{-\pi n y}\cos(n\pi x). \Rightarrow$

$u_y(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n\cos(n\pi x) = -\varphi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n\cos(n\pi x)$.

Buscamos los coeficientes integrando:

$$\int_0^1 \varphi(x)\cdot\cos(m\pi x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\pi\cdot b_n \int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lema de} \\ \text{Ortogonalidad}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n\cdot\frac{\delta_{m,n}}{2} = \frac{m\pi b_m}{2} \Rightarrow$$

SOLUCIONES

$$\Rightarrow b_m = \frac{12}{m\pi}\int_0^1 \varphi(x)\cos(m\pi x)\,dx \qquad m \geq 1.$$

c) $\varphi(x) = 40\cos^3(\pi x) = 10(4\cos^3(\pi x)) = 10(3\cos\pi x + \cos 3\pi x) =$

$= 30\cos\pi x + 10\cos 3\pi x.$

Como $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \cos(n\pi x)$, igualando coeficientes tenemos que:

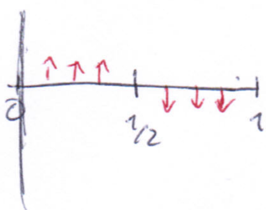
$b_1 = \frac{30}{\pi}$, $b_3 = \frac{10}{3\pi}$, $b_m = 0$ para el resto.

Luego $u(x,y) = \frac{30}{\pi} e^{-\pi y}\cos(\pi x) + \frac{10}{3\pi} e^{-3\pi y}\cos(3\pi x).$

$\varphi(x) = 40\cos^3(\pi x)$ tiene el mismo signo en $(0,1)$ que $\cos(\pi x)$.

$\cos(\pi x) > 0$ $x \in (0,1/2)$ y $\cos(\pi x) < 0$ $x \in (1/2, 1)$.

$u_y(x,0)$ representa el flujo de calor saliente por el punto de la frontera $(x,0)$. Como $u_y(x,0) = -\varphi(x)$, $u_y(x,0) < 0$ en $(0,1/2)$ y $u_y(x,0) > 0$ en $(1/2,1)$. Entonces entra calor por el trozo de frontera $(0,1/2)\times\{0\}$ y sale calor por $(1/2,1)\times\{0\}$.




Además el flujo total es 0.