EDPs y Series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES **Examen mayo 2020**

Nombre y DNI:

. . . .

1. a) Haz un resumen de aprox 1 folio en el que expliques los aspectos que consideras más importantes relacionados con las funciones armónicas.

   b) Si $\gamma > 0$, demuestra que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = \gamma\, u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

   tiene a lo sumo una solución $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

   Nota: 2'5 ptos

2. a) Demuestra que el sistema de funciones

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots$$

es ortogonal en $L^2(0, 1/2)$, y calcula las normas $\|\varphi_n\|_{L^2}$.

b) demuestra que si $f \in L^2(0, 1/2)$ cumple que $\int_0^{1/2} f(x) \operatorname{sen}(2n\pi x)\, dx = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $f \equiv 0$

c) deduce justificadamente que toda $f \in L^2(0, 1/2)$ se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\big(2n\pi x\big),$$

para unos coeficientes A_n y un tipo de convergencia a determinar

d) Expresa $\int_0^{1/2} |f(x)|^2\, dx$ como una suma adecuada de los coeficientes $|A_n|^2$

e) Encuentra el coeficiente A_1 para la función $f(x) = \cos(2\pi x)$, $x \in (0, 1/2)$.

Nota: 2'5 ptos

3. Considera la siguiente EDP

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2}, & t > 0,\ r \in (0,1),\ \theta \in (0, 2\pi) \\ u_r(t,1,\theta) = 0, & t > 0,\ \theta \in (0, 2\pi) \\ u(0,r,\theta) = f(r,\theta), & r \in (0,1),\ \theta \in (0, 2\pi), \end{cases}$$

a) Describe brevemente a qué problema físico corresponde

b) Si imponemos $u(t,r,\theta) = U(t,r)\,\mathrm{sen}(2\theta)$, determina la solución general en este caso

c) Encuentra la solución explícita cuando $f(r,\theta) = 5\,r^2\,\mathrm{sen}(2\theta)$

Nota: 2'5 ptos

4. Se define la siguiente colección de núcleos

$$J_N(x) \;=\; a_N \left(N\, F_N(x)\right)^2, \quad N \geq 1,$$

donde la constante de normalización a_N es tal que $\int_{\mathbb{T}} J_N(x)\,dx \;=\; 1$. Trata de responder a 5 de los siguientes apartados[1]:

a) Demuestra que $J_N(x)$ es un polinomio trigonométrico, y determina su grado. Calcula los coeficientes de Fourier $\widehat{J_N}(0)$ y $\widehat{J_N}(2N)$.

b) Demuestra que $a_N \sim 1/N^3$, si $N \to \infty$, y determina si es posible su valor exacto.

c) Demuestra que $\int_{\mathbb{T}} |x\, J_N(x)|\,dx \leq c/N$.

d) Para $f \in C(\mathbb{T})$, denotamos $\omega(\delta, f) := \sup\limits_{\substack{|h|\leq\delta \\ x\in\mathbb{T}}} |f(x+h) - f(x)|$. Demuestra por inducción que

$$\omega(N\delta, f) \;\leq\; N\omega(\delta, f), \quad N = 1, 2, \ldots$$

y que si $R > 0$ es un número real se tiene $\omega(R\delta, f) \;\leq\; (R+1)\,\omega(\delta, f)$.

e) Demuestra que

$$\big|f * J_N(x) - f(x)\big| \;\leq\; \big(1 + \big\|NyJ_N(y)\|_{L^1}\big)\,\omega(1/N, f),$$

f) Deduce de lo anterior que si $f \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{T})$ entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \big|f(x) - f * J_N(x)\big| \;\leq\; \frac{C_f}{N}.$$

Nota: 2'5 ptos

[1]Nota: cada apartado vale 0'5 ptos; aunque no sepas resolver un apartado, puedes usarlo para responder apartados posteriores.