1. **SS, Ejer 2.6.12.** Demuestra (sin usar el criterio de Stolz) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ implica C-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

   Nota: 0'2 ptos

2. **SS, Ejer 2.6.13.i.** Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ implica A-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, y que el recíproco no es cierto.

   Nota: 0'4 ptos

3. **SS, Ejer 2.6.13.ii.** Demuestra que C-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ implica A-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, y que el recíproco no es cierto.

   Nota: 0'6 ptos

4. **SS, Ejer 2.6.14.i.** Demuestra el siguiente recíproco parcial del Ejercicio 1 (teorema de Tauber)

$$\text{si C-}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \text{y} \quad |a_n| = o(1/n) \qquad \Longrightarrow \qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

   Sugerencia: demuestra primero que $S_N - \sigma_{N+1} = (a_1 + 2a_2 + \ldots + Na_N)/(N+1)$.

   Nota: 0'2 ptos

5. **SS, Ejer 2.6.14.ii.** Demuestra el siguiente recíproco parcial del Ejercicio 2

$$\text{si A-}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \text{y} \quad |a_n| = o(1/n) \qquad \Longrightarrow \qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

   Nota: 0'6 ptos

6. Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n} = -\ln|2\,\mathrm{sen}(\pi x)|, \quad x \in (0,1).$$

   Sugerencia: puedes usar la serie de potencias compleja de $F(z) = \mathrm{Log}(1-z)$, pero necesitarás algún argumento que justifique la igualdad de la serie para $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.

   Nota: 0'5 ptos

7. **SS, Ejer 2.6.20** Resolver el problema de Dirichlet en el anillo $A_{\rho,1} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \rho < |z| < 1\}$. Es decir, demuestra que dadas $f, g \in C_{\text{per}}[0, 2\pi]$ existe $u \in C^{\infty}(A_{\rho,1})$ tal que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } A_{\rho,1}, \qquad \text{y} \quad \lim_{z \to e^{i\theta_0}} u(z) = f(\theta_0), \qquad \lim_{z \to \rho e^{i\theta_0}} u(z) = g(\theta_0).$$

   Nota: 1 pto

8. **Espacios de Hilbert.** Sea $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un SON en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Demuestra los siguientes resultados que no se probaron en clase.

   a) $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es BON si y sólo si $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *completo* (ed, span $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $\mathbb{H}$)

   b) Si $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es BON entonces la aplicación

$$\mathbf{x} \in \mathbb{H} \longmapsto (\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

   es una biyección y una isometría entre $\mathbb{H}$ y $\ell^2(\mathbb{N})$.

   Nota: 0'6 ptos

9. **SS, Ejer 3.3.16.** En este ejercicio se demuestra el siguiente teorema de S. Bernstein: *si* $f \in C^{\alpha}(\mathbb{T})$ *con* $\alpha > 1/2$, *entonces* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Para ello proceder como sigue:

   (i) Probar que para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x-t)|^2 \, dx \;=\; 4 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sin^2(2\pi n t) \, |\hat{f}(n)|^2,$$

   y concluir que si f es Hölder continua entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sin^2(2\pi n t) \, |\hat{f}(n)|^2 \leq C \, t^{2\alpha}$.

   (ii) Para cada $j = 1, 2, \ldots$, elige $t = 1/2^{j+2}$ en (i) y demuestra la estimación

$$\sum_{2^{j-1} \leq |n| < 2^j} |\hat{f}(n)|^2 \leq C' \, 2^{-2j\alpha}.$$

   (iii) Utiliza (ii) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para concluir que

$$\sum_{n\neq 0} |\hat{f}(n)| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^{j-1} \leq |n| < 2^j} |\hat{f}(n)| < \infty.$$

   Nota: 0'6 ptos

Trabajos puntuables

1. **Criterio de Dirichlet-Jordan.** Demostrar y explicar razonadamente los resultados enunciados en el video del 27/4/2020. El video incluye un esbozo de demostración, que puedes completar leyendo de algún libro, eg [Folland, Thm 8.43].

   Nota: 2'5 ptos.

2. **Criterio de Dini: convergencia uniforme.** Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $I = [a, b] \subset \mathbb{T}$. Suponer que $f \in C(I)$ y que es Lip_α en un entorno de I, es decir, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq C|h|^\alpha, \quad \forall\, x_0 \in I,\ |h| < \delta_0. \tag{†}$$

   Demuestra que $S_{M,N}f(x_0)$ converge a $f(x_0)$, cuando $M, N \to \infty$, uniformemente en todo $x_0 \in I$. ¿Sabrías encontrar una condición integral de tipo Dini (uniforme en x_0) que reemplace a (†)?

   Sugerencia: en a) utiliza una estrategia similar a la del Criterio de Dini para escribir

$$S_{M,N}f(x_0) - f(x_0) = \widehat{g_{x_0}}(-N-1) - \widehat{g_{x_0}}(M), \quad \text{donde } g_{x_0}(y) = \frac{f(x_0+y) - f(x_0)}{e^{2\pi i y} - 1}.$$

   Después prueba que $\widehat{g_{x_0}}(N) \to 0$ si $|N| \to \infty$, **uniformemente en** $x_0 \in I$. Para ello puedes separar la integral que define $\widehat{g_{x_0}}(N)$ en 2 trozos, y tratar el segundo trozo como en la prueba de Dirichlet-Jordan.

   Nota: 2'5 ptos.

3. **Teorema de P. du Bois-Reymond.** Dar la construcción de una función $f \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$\limsup_{N\to\infty} |S_N f(0)| = \infty.$$

   Puedes seguir el esquema de demostración en [SS, Cap 3.2.2], o el procedimiento algo más directo en [Katznelson, Theorem II.2.1].

   Nota: 2'5 ptos

4. **Teorema tauberiano de Hardy**.

   a) Demuestra al siguiente mejora del Ejercicio 4

$$\text{si C-}\textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n = s \quad \text{y} \quad |a_n| = O(1/n) \qquad \Longrightarrow \qquad \displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n = s.$$

   b) Si $f \in L^1(0, 1)$ es acotada y creciente, demuestra que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{|f(1) - f(0)|}{\pi|n|}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

   c) Deduce de lo anterior y del teorema de Fejér, otra demostración para el Teorema de Dirichlet-Jordan, es decir si $f \in BV(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$ entonces

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x), \qquad \text{uniformemente en } \forall\, x \in \mathbb{T}.$$

   Sugerencia: En (a) puedes seguir las indicaciones detalladas en [SS, Problem 4.5]. En (b), pruébalo primero para $f =$ función simple creciente, y extiende al caso general aproximando con una sucesión de funciones simples crecientes $f_n \nearrow f$; ver [SS, Ejerc 3.17].

   Nota: 3 ptos.

5. **SS, Pr 3.4.1.** a) Si $\alpha \in (0,1)$ demuestra que la serie trigonométrica

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n^{\alpha}}$$

es convergente en todo $x \in \mathbb{R}$, pero que **no** es la SF de ninguna función **acotada** en $\mathbb{T}$.

b) Demuestra, sin embargo, que $|f(x)| \leq c/|x|^{1-\alpha}$, $0 < |x| \leq 1/2$, y por tanto que $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Sugerencia: en a) puedes seguir las indicaciones en [SS, Problem 1, Cap 3.4]. Para probar b) divide la suma en $\sum_{n \leq 1/x} + \sum_{n > 1/x} \ldots$, y usa sumación por partes en el segundo término.

Nota: 2 ptos.

6. **Desigualdad isoperimétrica.** Demostrar y explicar razonadamente los resultados correspondientes enunciados en el video del 4/5/2020. Te puedes apoyar en la §4.1 de SS.

Nota: 2'5 ptos.

7. **Funciones continuas no derivables en ningún punto.** Demostrar y explicar razonadamente los resultados correspondientes enunciados en el video del 4/5/2020. Te puedes apoyar en la §4.3 de SS.

Nota: 2'5 ptos.

8. **Teorema de equidistribución de Weyl.** Demostrar y explicar razonadamente los resultados correspondientes enunciados en el video del 4/5/2020. Te puedes apoyar en la §4.2 de SS.

Nota: 2 ptos.

9. **Criterio de equidistribución de Weyl.**

a) Demuestra que $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{T}$ es equidistribuida si y sólo si

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \xi_n} = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

b) Si $\sigma \in (0,1)$, demuestra que $\{\langle \gamma\, n^{\sigma} \rangle\}_{n \geq 1}$ es equidistribuida para todo $\gamma \neq 0$.

c) Demuestra que $\{\langle \gamma \log n \rangle\}_{n \geq 1}$ **no** es equidistribuida para ningún $\gamma \in \mathbb{R}$.

Este trabajo amplía contenidos respecto al trabajo anterior; ver **SS, pág 112**. La implicación "$\Rightarrow$" es el Ejerc 7, y para la implicación "$\Leftarrow$" necesitarás adaptar un poco la dem de [SS, Thm 2.1]. Los apartados b) y c) son los ejercicios 8 y 9 de SS, que tienen algunas indicaciones.

Nota: 3 ptos.