EDPs y series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES Test 1, 25/2/2020

Nombre: SOLUCIONES 10

1. Considera la EDP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u, & t > 0, \ 0 < x < \pi \\ u(t,0) = u_x(t,\pi) = 0. \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

a) Da una breve interpretación física de (P). ¿Qué debería ser $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$?

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Escribe el valor de los coeficientes de la solución general como una integral que involucre a la temperatura inicial $f(x) = u(0,x)$.

d) Resuelve explícitamente el caso $f(x) = 12\,\mathrm{sen}^3(x/2)$, y esboza la gráfica de la solución.

Sugerencia: En (d) puedes usar $4\,\mathrm{sen}^3\theta = 3\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}(3\theta)$.

a) Se trata de una varilla a la que le suministramos calor, solo que en este caso se le añade un efecto de disminución del calor proporcional al que hay en cada instante en la varilla.
Se trata de una varilla de longitud π donde en un extremo la temperatura siempre es nula ($u(t,0)=0$) mientras que en el otro se interpreta como que existe un aislante que no deja escapar el calor ($u_x(t,\pi)=0$)
$\lim_{t\to\infty} u(t,x)$ deberá ser 0, pues por uno de los extremos el calor se irá escapando.

b) Busquemos soluciones $u(t,x) \not\equiv 0$
Consideremos que la solución se puede expresar como $u(t,x) = T(t)\,X(x)$. Entonces, si es solución, debe cumplir la EDP, es decir, $u_t = T'(t)\,X(x) = u_{xx} - 2u = T(t)\,X''(x) - 2\,T(t)\,X(x)$. Dividiendo la expresión por $T(t)X(x)$ queda

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 2 \equiv cte = \rho$$

↳ pues el lado izquierdo sólo depende de t y el lado derecho sólo depende de x.

Tenemos así:

$$\begin{cases} (1) & T'(t) = \rho\, T(t) \longrightarrow T(t) = e^{\rho T(t)} \\ (2) & \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \rho + 2 \Rightarrow X''(x) = (\rho+2)\,X(x) \end{cases}$$

Para poder resolver (2) necesitamos distinguir varios casos:

Caso 1 $\quad \rho+2>0$

$\mathbb{X}''(x) = (\rho+2)\,\mathbb{X}(x) \rightsquigarrow \mathbb{X}(x) = A\cosh(\sqrt{\rho+2}\,x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\rho+2}\,x)$

Imponemos las condiciones de contorno

$u(t,0)=0 \Leftrightarrow T(t)\,\mathbb{X}(0)=0 \;\; \forall t \Leftrightarrow \mathbb{X}(0)=0 \;\; \forall t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\cosh(\sqrt{\rho+2}\cdot 0) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\rho+2}\cdot 0) = \underline{A=0}$

$u_x(t,\pi)=0 \Leftrightarrow T(t)\,\mathbb{X}'(\pi)=0 \;\; \forall t \Leftrightarrow \mathbb{X}'(\pi)=0 \overset{\wedge(A=0)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow B\sqrt{\rho+2}\,\cosh(\sqrt{\rho+2}\,\pi)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{B=0} & \text{SOLUCIÓN NULA} \\ \sqrt{\rho+2}=0 & \text{IMPOSIBLE} \\ \cosh(\sqrt{\rho+2}\,\pi)=0 & \text{IMPOSIBLE.} \end{cases}$

Luego si $\rho+2>0$, sólo obtenemos la solución nula $\mathbb{X}(x)\equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u(t,x) = T(t)\cdot 0 \equiv 0$

Caso 2 $\quad \rho+2=0$

$\mathbb{X}''(x) = 0\cdot\mathbb{X}(x) = 0 \Rightarrow \mathbb{X}'(x) = A \Rightarrow \mathbb{X}(x) = Ax+B$

Imponemos las condiciones de contorno

$u(t,0)=0 \Leftrightarrow \mathbb{X}(0)=0 \Leftrightarrow B=0$

$u_x(t,\pi)=0 \Leftrightarrow \mathbb{X}'(\pi)=0 \Leftrightarrow A=0$

En este caso también hemos obtenido una solución nula

Caso 3 $\quad \rho+2<0$. Llamemos $\rho+2 := -\lambda^2 < 0$ por comodidad

$\mathbb{X}''(x) = (\rho+2)\,\mathbb{X}(x) \rightarrow \mathbb{X}''(x) = -\lambda^2\,\mathbb{X}(x) \Leftrightarrow \mathbb{X}(x) = A\cos(\lambda x) + B\,\mathrm{sen}(\lambda x)$

Imponemos las condiciones de contorno

$u(t,0)=0 \Leftrightarrow \mathbb{X}(0)=0 \Leftrightarrow A\cos(\lambda\cdot 0) + B\,\mathrm{sen}(\lambda\cdot 0) = 0 \Leftrightarrow A=0.$

$u_x(t,\pi)=0 \Leftrightarrow \mathbb{X}'(\pi)=0 \overset{A=0}{\Leftrightarrow} B\lambda\cos(\lambda\pi)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 & \text{SOLUCIÓN NULA} \\ \lambda=0 & \text{IMPOSIBLE} \\ \cos(\lambda\pi)=0 \Leftrightarrow \lambda\pi = \frac{\pi}{2}+\pi k & k\in\mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}+k & k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Para evitar soluciones repetidas, consideraremos $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Entonces $\mathbb{X}_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(\lambda_n x) = B_n\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)$

Luego la solución será, como $-\lambda_n^2 = \rho+2 \Rightarrow \rho = -\lambda_n^2 - 2$ y tenemos

$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{\underbrace{(-\lambda_n^2-2)}_{-(\frac{1}{2}+n)^2}t}\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)$, que, como ya habíamos predicho,

SOLUCIONES

$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$

c) Si imponemos $u(0,x) = f(x)$, entonces

$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) = f(x)$, es decir, tenemos que ser capaces de expresar $f(x)$ como la serie anterior. Para ello se utiliza la ortogonalidad del seno.

$$\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right) dx = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_0^\pi \operatorname{sen}\Big(\underbrace{\left(\frac{1}{2}+n\right)}_{\tilde{n}}x\Big) \operatorname{sen}\Big(\underbrace{\left(\frac{1}{2}+m\right)}_{\tilde{m}}x\Big) dx = B_m \int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right)^2 dx =$$

$$\downarrow$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(\tilde{n}x)\operatorname{sen}(\tilde{m}x)\,dx = 0 \quad \text{si } \tilde{n} \neq \tilde{m}$$

(ortogonalidad del seno) * Detrás

$$= B_m \int_0^\pi \frac{-\cos\left(2\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right) + 1}{2} dx = \frac{B_m}{2}\left(-\int_0^\pi \cos\left(2\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right) dx + \pi\right) =$$

$$= \frac{B_m}{2}\left(\frac{-\operatorname{sen}(2(1/2+m)x)}{2(1/2+m)}\Bigg|_0^\pi + \pi\right) = \frac{B_m}{2}\left(-0+0+\pi\right) = B_m \frac{\pi}{2}$$

Luego $B_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+m\right)x\right) dx$

d) $f(x) = 12 \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) = 3 \cdot 4 \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left(3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)\right) =$

$= 9 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 3\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)$

En este caso particular, no necesitamos hacer las integrales para calcular los coeficientes B_m, pues basta considerar $B_0 = 9$, $B_1 = -3$ y $B_n = 0$ $\forall n \neq 0,1$.

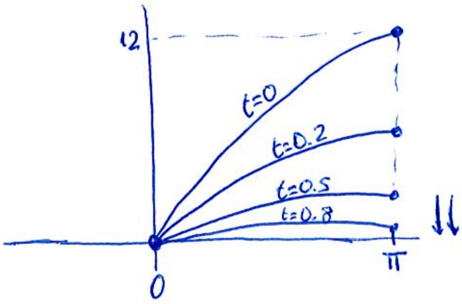
Por tanto, la solución quedará

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{(-\lambda_n^2-2)t} \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) = B_0 e^{(-\lambda_0^2-2)t} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + B_1 e^{(-\lambda_1^2-2)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right) =$$

$$= 9 e^{(-1/4-2)t} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 3 e^{(-(1/2+1)^2-2)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right) =$$

$$= 9 e^{-9/4\, t} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 3 e^{-17/4\, t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)$$ y cuya gráfica sería

$9 e^{-9/4 t} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 3 e^{-17/4 t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)$



$\Downarrow$ la función va decreciendo de manera exponencial (en $x=0$, $u(t,x)=0$ $\forall t$, mientras que en $x=\pi$, la función va decreciendo pues va multiplicada por exponenciales que tienden a 0)

* Se puede probar que $\int_0^\pi \operatorname{sen}(\tilde{n}x)\operatorname{sen}(\tilde{m}x)\,dx$ haciendo uso de la fórmula $2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = -\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, pues

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(\tilde{n}x)\operatorname{sen}(\tilde{m}x)\,dx \underset{\tilde{n}\neq\tilde{m}}{=} \frac{1}{2}\left.\frac{-\operatorname{sen}((\tilde{n}+\tilde{m})x)}{\tilde{n}+\tilde{m}}\right|_0^\pi + \frac{1}{2}\left.\frac{\operatorname{sen}((\tilde{n}-\tilde{m})x)}{\tilde{n}-\tilde{m}}\right|_0^\pi =$$

$$= -0+0-0+0 = 0 \quad \text{c.q.d.}$$