

Hoja 1: El plano complejo

1. Encuentra una expresión binomial y una expresión polar para los siguientes números complejos

(a)  $\frac{1}{3+4i}$       (b)  $\sqrt{3+4i}$       (c)  $(1+i)^4$       (d)  $(\sqrt{3}+i)^7$       (e)  $(\frac{2+i}{3-2i})^2$       (f)  $\sum_{n=1}^{100} i^n$

2. Probar que no existe ningún orden total en  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Es decir, una operación “ $\prec$ ” con las propiedades

- (i)  $\forall z, w \in \mathbb{C}$  se tenga que  $z \prec w$  o bien  $w \prec z$  o bien  $z = w$
- (ii) si  $z_1 \prec z_2$  entonces  $z_1 + w \prec z_2 + w, \forall w \in \mathbb{C}$ , y  $z_1 w \prec z_2 w, \forall w \succ 0$ .

*Sugerencia:* suponer  $i \succ 0$  y buscar una contradicción.

3. Demuestra las siguientes propiedades, si  $z, w \in \mathbb{C}$ .

- (i)  $|z + w| \geq ||z| - |w||$
- (ii)  $|z + w| = |z| + |w|$  si y sólo si  $z = \lambda w$  para algún  $\lambda > 0$
- (iii) Regla del paralelogramo:  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
- (iv) utiliza (iii) para hallar  $\min_{z \in \mathbb{C}} |z - a|^2 + |z - b|^2$ .

- 4. (i) Demuestra que  $\frac{z+w}{z-w}$  es imaginario puro si y sólo si  $|z| = |w|$ . ¿Cuándo es  $\frac{z+w}{z-w} = i$ ?
- (ii) Demuestra que, si  $|a| < 1$ , entonces  $|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}| \leq 1$  si y sólo si  $|z| \leq 1$ . ¿Cuándo se tiene igualdad?

*Sugerencia:* En (i) calcula la parte real de  $\frac{z+w}{z-w}$ . En (ii) estudia cuándo se tiene  $|z - a|^2 \leq |1 - \bar{a}z|^2$ .

5. Dibuja los siguientes conjuntos de puntos en el plano complejo

(a)  $\Re z = 3$       (b)  $\frac{1}{z} = \bar{z}$       (c)  $|z| = |z - 1|$       (d)  $|z + 4i| + |z - 4i| = 10$       (e)  $|z| = \Re z + 1$

- 6. (i) Demuestra que  $\Im m\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0$  es una recta que pasa por  $a$  y tiene la misma dirección que  $b$ . Comprueba que puede también escribirse como  $Az + B\bar{z} + C = 0$ , determinando los valores de  $A, B, C$ .
- (ii) Escribe la circunferencia  $|z - a| = r$  de la forma  $z\bar{z} + Az + B\bar{z} + C = 0$ , determinando  $A, B, C$ .

7. Esboza los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{C}$ :

(a)  $\left\{z : \Im m\left(\frac{z-i}{1+i}\right) > 0\right\}$       (b)  $\left\{z : \Re\left(\frac{z}{i}\right) > 1\right\}$       (c)  $\{z : |z|^2 + 2\Re(iz) < 1\}$

8. Demuestra que  $\pi/4 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$  mediante el producto de dos complejos adecuados.

9. (i) Encuentra una fórmula para  $\sin(3\theta)$  en términos del  $\sin \theta$ .

(ii) Demuestra que  $\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n - 1)\theta = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin \theta}$ .

10. Calcula y dibuja las siguientes raíces complejas  $\sqrt[4]{-16}, \sqrt[6]{64}, \sqrt[3]{-8i}$ .

11. Demuestra que si  $z \neq 1$  cumple  $z^n = 1$ , entonces se tiene  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ .

*Sugerencia:* suma la progresión geométrica.

12. Demuestra que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  entonces para todo  $a \in \mathbb{C}$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + a) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} az_n = \infty$  (si  $a \neq 0$ ).
13. Demuestra que la proyección estereográfica transforma los círculos  $C$  de  $S^2$  en círculos de  $\mathbb{C}$  (o en rectas si  $C$  contiene el polo norte).
14. Demuestra que la distancia cordal en  $\mathbb{C}^\sharp$  cumple

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad \text{y} \quad \chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  en  $\mathbb{C}^\sharp$  si y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(z_n, z) = 0$ .

15. (i) Demuestra que la distancia cordal es máxima  $\chi(z, w) = 2$  si y sólo si  $w = -1/\bar{z}$ .  
(ii) Comprueba que si  $w = -1/\bar{z}$  entonces  $|z - w| \geq 2$ .  
(iii) Demuestra que si  $|z - w| \geq 2$ , entonces existe algún  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $z - a = -1/\overline{(w - a)}$ .

*Sugerencia:* En (iii), con una rotación y traslación adecuadas puedes suponer  $w = 0$  y  $z \geq 2$ .

16. \* Para  $z, w \in \mathbb{C}$  fijos, determina los valores máximo y mínimo de  $\chi(z - a, w - a)$  cuando  $a \in \mathbb{C}^\sharp$ .

*Sugerencia:* Para el máximo, si  $|z - w| \geq 2$  utiliza el ejercicio 15; si  $|z - w| < 2$ , redúcelo al caso  $z = R$  y  $w = -R$  con  $R \in (0, 1)$ .

17. La ecuación de tercer orden  $x^3 = 3px + 2q$  tiene como solución real

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}. \quad (\dagger)$$

Obtén justificadamente esta expresión con los siguientes pasos

- (i) Escribe  $x = u + v$ , y deduce que si  $u^3 + v^3 = 2q$  y  $uv = p$ , entonces  $x$  es una solución de la ecuación.  
(ii) Eliminando  $v$ , y concluye que  $u^3$  debe cumplir la ecuación cuadrática  $u^6 + p^3 = 2qu^3$ .  
(iii) Encuentra una expresión para  $u^3$ , y por simetría, otra expresión para  $v^3$ .  
(iv) Puesto que debemos tener  $u^3 + v^3 = 2q$ , deduce la fórmula  $(\dagger)$   
(v) Demuestra que las otras dos soluciones de la ecuación cúbica vienen dadas por

$$x_2 = S_+ \omega_+ + S_- \omega_- \quad \text{y} \quad x_3 = S_+ \omega_- + S_- \omega_+$$

donde  $S_\pm = \sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 - p^3}}$  y  $\omega_\pm = e^{\pm i2\pi/3}$ .