Hoja 2: La derivada compleja

1. Utiliza las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que hacen holomorfa a la función $f(x+iy) = 2x + y + i(ax+by)$, y encuentra una expresión para f en términos de z.

2. Demuestra que la función definida por $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{C}$, y encuentra una expresión para f'.

3. Si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, probar la equivalencia de las condiciones siguientes:

   a) f es constante;
   b) $\Re e\,(f)$ es constante;
   c) $\overline{f}$ es holomorfa;
   d) $|f|$ es constante;
   e) $|f|$ es holomorfa;
   f) $f(\Omega)$ está contenido en una recta o un círculo de $\mathbb{C}$.

4. Si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(\Omega)$ está contenido en la parábola $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = u^2\}$, probar que f es necesariamente constante.

5. Probar que si $f(z)$ es holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$, entonces la función $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ está bien definida y es holomorfa en el semiplano inferior.

6. Sea $\vec{\mathbf{V}}(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big)$ el campo de velocidades de un fluido en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que

   - $\vec{\mathbf{V}}$ es *irrotacional* si $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
   - $\vec{\mathbf{V}}$ es *incompresible* si $\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

   (a) Demuestra que $f(z)$ es holomorfa en Ω si y sólo si $\vec{\mathbf{V}}(z) = \overline{f(z)}$ es irrotacional e incompresible.

   (b) Esboza el campo de vectores asociado a la función holomorfa $f(z) = z^2$.

   Sugerencia: para (b) puedes usar el comando `plotdf` de WxMaxima.

7. Decimos que una función real $\varphi(x,y)$ es *armónica en* $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}ar(\Omega)$, si cumple la EDP
$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega.$$

   (a) Probar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $\Re e\, f, \Im m\, f \in \mathcal{H}ar(\Omega)$.

   (b) Encuentra dos polinomios $P(x,y), Q(x,y)$ de grado 4, armónicos y linealmente independientes.

   (c) Demuestra que si $f : \Omega \to \Omega_1$ es holomorfa y $u \in \mathcal{H}ar(\Omega_1)$, entonces $\Delta(u \circ f) = 0$ en Ω.

8. (a) Demuestra que las funciones holomorfas en general no cumplen el teorema del valor medio, es decir no siempre se tiene que $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\theta)(\alpha - \beta)$ para algún $\theta \in [\alpha, \beta]$.

   (b) Demuestra que sí se cumple el siguiente sustituto: si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω abierto convexo, entonces
$$f(\alpha) - f(\beta) = \Re e\left[f'(\theta_1)\,(\alpha - \beta)\right] + i\,\Im m\left[f'(\theta_2)\,(\alpha - \beta)\right]$$
   para ciertos $\theta_1, \theta_2 \in [\alpha, \beta]$.

   Sugerencia: en (a) prueba con $f(z) = z^3 + iz^2$. En (b), reduce al caso $\alpha = 1, \beta = 0$, y usa el TVM en $\mathbb{R}^2$.

9. Demuestra la siguiente regla de L'Hôpital: si f, g son derivables en z_0 y cumplen $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$ entonces
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

10. Si $P(z)$ es un polinomio de grado n con ceros $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, demuestra que
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \alpha_j}.$$

11. Probar que una función racional de orden uno $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ es constante si y sólo si $ad - bc = 0$.

12. Considera las transformaciones de Möbius
$$T_1 z = \frac{z+2}{z+3}, \quad \text{y} \quad T_2 z = \frac{z}{z+1}.$$
Hallar $T_1 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1$ y $T_1^{-1} \circ T_2$.

13. (a) Construye una transformada de Möbius T tal que
$$T(1) = 0, \quad T(i) = 1 \quad \text{y} \quad T(-1) = \infty.$$

(b) Demuestra que si $|z| < 1$ entonces $\Im m\,[T(z)] > 0$ (y viceversa).

(c) Concluye que T es una biyección holomorfa entre el disco unidad $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ y el semiplano superior $\mathbb{H} = \{\Im m\, z > 0\}$.

(d) Encuentra una expresión para las funciones T', T^{-1} y $(T^{-1})'$.

14. (a) Demuestra que una transformada de Möbius $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (distinta de la identidad) tiene a lo sumo dos puntos fijos en $\mathbb{C}^\sharp$.

(b) Encuentra los puntos fijos cuando T es una traslación, una dilatación y una inversión.

Sugerencia: comprueba que la ecuación $\frac{az+b}{cz+d} = z$ tiene a lo sumo 2 raíces en $\mathbb{C}^\sharp$ (distingue $c = 0$ y $c \neq 0$).

15. Encuentra en cada caso una transformación de Möbius T con la propiedad indicada:

(a) T envía la terna $(2, i, -2)$ en $(1, i, -1)$ (en ese orden).

(b) T envía la terna $(\infty, i, 0)$ en $(0, i, \infty)$ (en ese orden).

(c) T envía la circunferencia unidad $\{|z| = 1\}$ en el eje imaginario $\{\Im m\, z = 0\}$.

(d) T fija los puntos $z = 0$ y $z = i$.