

Hoja 3: Exponencial, trigonométricas y logaritmos complejos

1. Demuestra que $\operatorname{sen} z = 0$ si y sólo si $z \in \pi\mathbb{Z}$, y $\operatorname{cos} z = 0$ si y sólo si $z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$
2. Demuestra las fórmulas

$$\operatorname{sen}(z+w)\operatorname{sen}(z-w) = \operatorname{sen}^2 z - \operatorname{sen}^2 w \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{cos} z.$$

3. El seno y coseno hiperbólicos de un número complejo z se definen como

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

- a) Demuestra que $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ y $\operatorname{cosh} z = \operatorname{cos}(iz)$.
 - b) Encuentra una serie de potencias para $\operatorname{senh} z$ y $\operatorname{cosh} z$
 - c) Demuestra que $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.
 - d) Encuentra una fórmula para $\operatorname{senh}(z+w)$ y $\operatorname{cosh}(z+w)$.
4. a) Calcula las partes real e imaginaria de $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$, en términos de $\operatorname{cos} x, \operatorname{sen} x, \operatorname{cosh} y, \operatorname{senh} y$.
 - b) Demuestra que $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$ y $|\operatorname{cos} z|^2 = \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

5. **V ó F** (justificar).

- a) $|\operatorname{sen} z| \leq 1, \forall z \in \mathbb{C}$
- b) $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$
- c) si $a \in [-1, 1]$ entonces $\operatorname{cos} z = a$ sólo tiene soluciones reales
- d) si $a > 1$ entonces $\operatorname{cos} z = a$ sólo tiene soluciones imaginarias puras.

6. Sea $f(z) = e^{e^z}$.

- a) Calcula $\Re f(z), \Im f(z)$ y $|f(z)|$
- b) Encuentra todas las soluciones de $f(z) = 1$.

7. a) Demuestra que si $\theta_0 \in \arg z$ entonces se tiene la igualdad $\arg z = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.
- b) Demuestra que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$, pero en general $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$
- c) Demuestra que $\arg(z^n) \supseteq n \arg(z)$, pero en general la inclusión es estricta.

8. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\operatorname{Arg}_\alpha z = \arg(z) \cap (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$.

- a) Demuestra que $\operatorname{Arg}_\alpha z = \alpha + \operatorname{Arg}(e^{-i\alpha} z)$
- b) Deduce que $\operatorname{Arg}_\alpha$ es continua en $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$, donde $L_\alpha = \{re^{i\alpha} : r \leq 0\}$.
- c) Deduce que $\operatorname{Log}_\alpha z := \ln |z| + i\operatorname{Arg}_\alpha z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$, y encuentra una relación con $\operatorname{Log} z$

9. **V ó F:**

- a) $\operatorname{Log}(i^3) = 3\operatorname{Log}(i)$
- b) $\log(i^3) = 3\log(i)$
- c) $\log(i^3) = 3\operatorname{Log}(i) + i2\pi\mathbb{Z}$

10. a) Determina dónde son holomorfas $\text{Log}(z - 1)$ y $\text{Log}(1 - z)$
 b) Demuestra que $\text{Log}(1 - z) = \text{Log}(z - 1) + i\pi$, si $z \in \mathbb{H} = \{\Im z > 0\}$
 c) Demuestra que $\text{Log}(1 - z) = \text{Log}(z - 1) - i\pi$, si $z \in \mathbb{H}_- = \{\Im z < 0\}$
11. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ son distintas de cero y cumplen

$$f(z)^2 = g(z)^2, \quad \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$$

demuestra que, en cada componente conexa de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ se tiene que, o bien $f \equiv g$, o bien $f \equiv -g$.

12. Determina dónde son holomorfas y relaciona entre sí las siguientes funciones

$$f_1(z) = \sqrt{z^2 - 1}, \quad f_2(z) = i\sqrt{1 - z^2}, \quad f_3(z) = z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$

donde $\sqrt{\quad}$ denota la determinación principal de la raíz.

Sugerencia: Para relacionar entre sí, utiliza el ejercicio 16.

13. * Encuentra una fórmula para $\arcsin z$ y determina en qué dominio está definida y es holomorfa. Encuentra también una expresión para su derivada.
14. Si $z \neq 0$ y $w \in \mathbb{C}$ se define la potencia multivaluada $[z^w] := e^{w \log z}$
- a) Calcula $[i^i]$ y $[e^{i\pi}]$
 b) Demuestra que $[z^n] = \{z^n\}$
 c) Demuestra que $[z^{p/q}] = \{\xi e^{\frac{2\pi i k p}{q}} : k = 0, \dots, q-1\}$, donde $\xi = [z^{p/q}]_P$ es la potencia principal.
 d) Demuestra que $\text{Card } [z^w] < \infty$ si y sólo si $w \in \mathbb{Q}$.
15. * Demuestra las siguientes inclusiones, y comprueba con un ejemplo que en general son estrictas
- a) $[z^{w_1+w_2}] \subset [z^{w_1}][z^{w_2}]$
 b) $[z^{w_1 \cdot w_2}] \subset [z^{w_1}]^{w_2}$
 c) $w \log z \subset \log[z^w]$
16. * Si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ son funciones holomorfas distintas de cero y cumplen

$$f(z)^2 = g(z)^2, \quad \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$$

demuestra que, en cada componente conexa de $\Omega_1 \cap \Omega_2$, o bien $f \equiv g$, o bien $f \equiv -g$.

Sugerencia: usar que $f/g \in \mathcal{H}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ y toma valores reales.