Funciones de Variable Compleja *Curso 2014/15*

Hoja 4: Integración compleja y fórmula de Cauchy en el disco

1. Calcula la integral de línea de $f(z) = (z+2)/z$ sobre los siguientes arcos de circunferencia

$$(a)\ \gamma = \{|z| = 2\} \qquad (b)\ \gamma^+ = \{|z| = 2\} \cap \{\Im m\, z \geq 0\} \qquad (c)\ \gamma^- = \{|z| = 2\} \cap \{\Im m\, z \leq 0\}$$

2. Calcula $\int_\gamma \exp(\pi \bar{z})\, dz$ cuando γ es la frontera del cuadrado de vértices $[0,\, 1,\, 1+i,\, i]$.

3. Calcula la integral de línea $\int_\gamma \left(x^2 - iy^2\right) dz$ cuando

   a) γ es el arco de la parábola $y = 2x^2$ que une $P_0 = 1 + 2i$ con $P_1 = 2 + 8i$

   b) γ es el segmento que une P_0 con P_1

   ¿Es razonable que las integrales no coincidan?

4. Utiliza primitivas para calcular las integrales

$$(a)\ \int_i^{1/2} e^{\pi z}\, dz \qquad (b)\ \int_0^{\pi+i} \cos(z/2)\, dz \qquad (c)\ \int_{|z|=4} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

5. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco C^1 a trozos y $f \in C(\gamma^*)$. Demuestra que para toda sucesión $b_n \nearrow b$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_{|[a,b_n]}} f(z)\, dz \;=\; \int_\gamma f(z)\, dz.$$

   Sugerencia: demuestra primero que para una función real acotada h se cumple $\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} h(t)\, dt = \int_a^b h(t)\, dt$.

6. * En clase probamos que $I(a) := \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ cuando $a \in \mathbb{D}$.

   a) Demuestra que $I(a) = 0$ cuando $|a| > 1$.

   b) Calcula $I(a; z_0, R) := \int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-a}$, cuando $a \in D_r(z_0)$ y cuando $a \notin \overline{D_r(z_0)}$

   Sugerencia: en (b), escribe $I(a; z_0, R)$ en términos de $I(\tilde{a})$ con un cambio de variables adecuado.

7. Utiliza la fórmula integral de Cauchy para evaluar las siguientes integrales

$$(a)\ \int_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\, dz \qquad (b)\ \int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^4}\, dz \qquad (c)\ \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{Log}(z+1)}{\sqrt{z}(z-1)(z+2)}\, dz$$

8. Demuestra que si $a > 1$ entonces $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$.

   Sugerencia: usando $z = e^{it}$, transforma la integral en $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ para una $f(z)$ adecuada, y después utiliza la fórmula integral de Cauchy.

9. Demuestra que, si $P(z)$ es un polinomio de grado n entonces $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz \;=\; 2\pi i n$.

   Sugerencia: usar el ejercicio 10 de la hoja 2.

10. * a) Demuestra que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-(t+ib)^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

    b) Demuestra que a) sigue siendo cierto reemplazando ib por un complejo $a + ib$ arbitrario.

    c) Utiliza lo anterior para demostrar que si $f(t) = e^{-\pi t^2}$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i t x}\, dt = f(x)$.

    Sugerencia: En (a), utiliza $\int_{\gamma_N} e^{-z^2} dz = 0$ si γ_N es el rectángulo con vértices $\pm N, \pm N + ib$, y haz $N \to \infty$.