Ejercicios adicionales de Series de Potencias

1. Calcula los radios de convergencia de

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{3n} \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{3^n} \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n \qquad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$$

Sugerencia: En c,d puedes usar la fórmula de Stirling $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.

2. Determina los puntos z donde convergen las siguientes series

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n} z^n \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(z-3)^n}{n^2} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{z}{1+z}\right)^n \qquad (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{z^n}{1+z^{2n}}$$

Sugerencia: Para determinar qué ocurre en la frontera puedes usar el siguiente criterio de Abel: si $a_n \geq 0$ y decreciente a 0, y si la serie $\sum a_n z^n$ tiene $R = 1$, entonces converge en todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.

3. Calcula las sumas de las siguientes series

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n} z^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n!} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\cos(n\theta)}{n2^n} \qquad (d)\ \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (z-1)^n$$

4. Desarrolla en serie de potencias en torno al origen, identificando el radio de convergencia

$$(a)\ \frac{z^2}{(z+1)^2} \qquad (b)\ \operatorname{Log} \tfrac{1+z}{1-z} \qquad (c)\ \cosh^2 z \qquad (d)\ \sqrt{z+i} \qquad (e)\ \frac{z}{z^2-5z+6}$$

5. * Considera la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{3n}$

(i) Determina para qué valores de z la serie converge, y dónde es holomorfa la función $f(z)$

(ii) Calcula la integral $\displaystyle\int_{|z-\frac{1}{4}|=\frac{1}{2}} \frac{e^{f(z)}}{z^2}\, dz$

(iii) Encuentra una expresión para $f(z)$, y utilízala para calcular $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{z^2}{z^3+1}\, f(z)\, dz$