Aplicación del teorema de los residuos al cálculo de integrales

1. Aplique directamente el teorema de los residuos al cálculo de

   (a)
   $$\int_C \frac{dz}{z^4+1} \quad \text{siendo } \; C = \{(x,y) : x^2+y^2 = 2x\}$$

   (b)
   $$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)} \quad \text{siendo } \; C = \{z : |z-1| = 1/2\}$$

2. Integrando la función adecuada sobre la circunferencia unidad obtenga

   (a)
   $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} \quad \text{con } \; a > b > 0.$$

   (b)
   $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2} \quad \text{con } \; a, b > 0.$$

3. Integre las siguientes fracciones racionales con ayuda de un semicírculo

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n dx}{x^{2n}+1}$ ambas para $n \geq 2$

4. Si $b^2 < 4ac$ demostrar

   (a)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

   (b)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{4\pi}{(\sqrt{4ac-b^2})^3}$$

5. Calcule con ayuda del lema de Jordan las siguientes integrales

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^2+x+1}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x dx}{x^2+2x+20}$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos ax dx}{x^2+b^2}$ $a, b > 0$

$$\text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x\, dx}{x^2} \qquad \left(\text{tomar} \quad f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}\right)$$

$$\text{(f)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{x^3} \qquad \left(\text{tomar} \quad f(z) = \frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\right)$$

6. Esquive convenientemente el origen para calcular

$$\text{(a)} \quad (v.p.) \int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^4-1} \qquad \text{(b)} \quad (v.p.) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4-1}$$

$$\text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{1+x^2} \qquad \text{para} \quad -1 < p < 1$$

7. Las siguientes integrales se pueden calcular con ayuda del *comecocos*

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{\log x\, dx}{x^2+a^2} \qquad \text{(b)} \int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x\, dx}{x^2+a^2} \qquad \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)(\log^2 x + \pi^2)}$$

8. Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+a}\, dx = \frac{\pi}{4a}(1-e^{-2a})$$

9. Calcule con ayuda de una franja de anchura adecuada la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{(e^x+1)(e^x+2)}$$

10. Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$