Acumulación de ceros, módulo máximo, ...

1. ¿Puede una función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ cumplir que $f(1/n) = 1/\sqrt{n}$ para $n > 1$? Estudie la misma cuestión suponiendo ahora que $f \in \mathcal{H}(D(1,1))$.

2. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Demuestre que f es constante. Suponga ahora que $f(\mathbb{C}) \cap [0,+\infty) = \emptyset$ ¿Se obtiene la misma conclusión? Estudie que pasa suponiendo solamente que $f(\mathbb{C}) \cap [a,b] = \emptyset$.

3. Justifique que no existe una función $f \in \mathcal{H}(D(0,2))$ tal que $f(2-1/n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y
$$0 < \limsup_n \sqrt[n]{\frac{|f^{n)}(1)|}{n!}} < \frac{1}{2}$$

4. Sea f una función continua sobre $\{\Im(z) \geq 0\}$, holomorfa sobre $\{\Im(z) > 0\}$ y tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \mathbb{R}$. Demuestre que f admite una extensión holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$.

5. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Demuestre que existe una sucesión $z_n \in D(0,1)$ tal que $\lim_n |z_n| = 1$ y tal que $|f(z_n)|$ está acotada.

6. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no constante con radio de convergencia $R > 0$. Pongamos para $0 \leq r < R$
$$M(r) = \{|f(z)| : |z| = r\}$$
$$M_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

   (a) Demuestre que $M(r)$ y $M_1(r)$ son estrictamente crecientes en $[0,R)$ y que $M(r) \leq M_1(r)$.

   (b) Si $f(z)$ es un polinomio de grado n, demuestre que
   $$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geq \frac{M(r_2)}{r_2^n}$$
   para cada $0 < r_1 < r_2$.

   (c) Demuestre que dado $r \in [0,R)$ si $\delta > 0$ entonces
   $$M_1(r) \leq \frac{r+\delta}{\delta} M(r+\delta)$$
   para todo delta $\delta > 0$ tal que $r + \delta < R$.

   (d) Demuestre que para $r \in [0,R)$ se tiene que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq M(r)^2.$$

(e) Demuestre que el módulo de los $z \in D(0,R)$ tales que $f(z) = 0$ está acotado inferiormente por

$$\frac{r|a_0|}{M(r) + a_0}$$

donde $r \in [0, R)$.

7. Sean $0 < r < R < +\infty$ y $C = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$. Demuestre que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sup\{|p(z) - 1/z| : z \in C\} \geq \alpha$$

para todo polinomio algebraico $p(z)$.

8. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$. Demuestre que f es un polinomio.