Series de Potencias y desarrollos relacionados

1. Obtenga los desarrollos en serie de potencias centrados en cero para las siguientes funciones: $(z+1)^{-1}$, $\log z$, $(z^2+1)^{-1}$, $\arctan z$, $(1+z)^{-2}$ y $(1+z)^{-1/2}$.

2. Obtenga la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n.$$

3. Considere la sucesión (a_n) definida por recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ a partir de $a_0 = a_1 = 1$.

   (a) Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

   (b) Calcular de modo explícito la función definida por la suma de la serie anterior.

   (c) Obtener una expresión no recurrente para (a_n).

4. Demuestre el siguiente criterio de convergencia de Raabe para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

   (a) si $n(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) > 1 + \varepsilon$ a partir de un cierto n, la serie converge;

   (b) si $n(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) \leq 1$, la serie diverge.

5. Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

6. Estudie la convergencia de la serie

$$1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\, z^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, z^n \ldots$$

   según el valor de α. ¿Qué función representa?

7. Encuentre fórmulas para las sumas:

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta$$

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$$

8. Encuentre una fórmula compacta para el núcleo de Dirichlet

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

   Demuestre que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

9. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $f(0) = f(2\pi)$. Demuestre que además

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(e^{i\theta k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt$$

siempre que $\frac{\theta}{\pi}$ no sea racional.

10. Utilice el desarrollo en serie de $-\log(1-z)$ para demostrar que

$$\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}3\theta}{3} + \cdots = \frac{\pi - \theta}{2}$$

con $0 < \theta < 2\pi$. ¿Cuánto suma la serie correspondiente de cosenos?

11. Demuestre que la una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente en un disco de radio $R > 0$ puede ser reordenada como serie de potencias de $(z - z_0)$, donde $|z_0| < R$, y la serie resultante es convergente (al menos) en un disco de centro z_0 y radio $r = R - |z_0|$.

12. Demuestre que en el desarrollo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zw + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) z^n,$$

válido en un entorno de $z = w = 0$, los coeficientes $P_n(z)$ son polinomios.

13. Calcule para $|z| \neq 1$ la suma de la serie

$$\frac{1}{1-z} + \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}} + \ldots$$

14. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en el disco $D(0,1)$. Suponga que $a_1 = 1$ y que $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. Demuestre que $f(z)$ es inyectiva en $D(0,1)$.