Variable Compleja, 3º Matemáticas/4º PES **Examen final, 12/1/2015**

Nombre y DNI:

....

1. Escribe una demostración rigurosa para la identidad

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i, \quad \forall\, a \in D_r(0).$$

Nota: 2 puntos

2. Para cada $k \in \mathbb{N}$ considera la función definida por la serie de potencias

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n\,.$$

   a) Demuestra que se cumple la relación de recurrencia $f'_{k-1}(z) = k f_k(z)$.

   b) Calcula el radio de convergencia de la serie para cada $k \in \mathbb{N}$.

   c) Encuentra una fórmula explícita para $f_k(z)$, y demuestra que f_k se extiende de manera holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

   d) ¿Qué tipo de singularidad presenta f_k en 1? Calcula el residuo.

Nota: 2'5 puntos

3. Considera la función $f(z) = e^{i\pi z}/(z^2 + z + 1)$.

   a) Determina sus polos y residuos en el semiplano superior.

   b) Aplica el teorema de los residuos a la función f para calcular las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+x+1}\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+x+1}\,dx$$

Nota: 2 puntos

4. Sea Ω un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

   a) Deduce de la fórmula de Cauchy que si $\bar{D}_r(a) \subset \Omega$ entonces $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$.

   b) Demuestra a partir de a) que $|f(z)|$ no puede alcanzar un máximo estricto en ningún punto de Ω.

   c) ¿Podría $|f(z)|$ alcanzar un mínimo estricto en algún $a \in \Omega$? ¿Y si suponemos que f no se anula?

Nota: 2 puntos

5. Cuestiones: responde justificando adecuadamente el razonamiento.

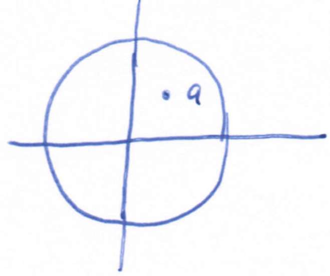
   a) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 1$, y suponemos $f^{(n)}(1) = 0$ para todo $n \geq 5$, ¿cuánto vale a_6?

   b) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ y $\Re e\, f(z) > 0$, ¿qué tipos de singularidad podría tener f en el origen?

   c) Suponer que $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y no nulas, y existe una sucesión convergente $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f(a_n)g'(a_n) = f'(a_n)g(a_n)$. ¿Qué relación existe entre f y g?

Nota: 1'5 puntos

① $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \qquad \forall a \in D(0,r)$



2

<u>Dem:</u>

Pongamos $\dfrac{1}{z-a}$ como serie de potencias centrada en 0.

$\dfrac{1}{z-a} = \dfrac{1/z}{1-\frac{a}{z}}$. Como $\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |a| < |z| = r$ porque $z \in C(0,r)$ ✓

y $a \in D(0,r) \Rightarrow \dfrac{1}{z-a} = \dfrac{1}{z} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$

converge uniformemente. Por la convergencia uniforme

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}\,dz \overset{A}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z|=r} \frac{a^n}{z^{n+1}}\,dz = \int_{|z|=r} \frac{dz}{z} \overset{*}{=}$$

ya que si $n \geq 1$ existe primitiva de $\dfrac{a^n}{z^{n+1}}$ en $D(0,r)$

y por tanto $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{a^n}{z^{n+1}}\,dz = 0$ ✓

la primitiva es $a^n \cdot \dfrac{z^{-n}}{-n}$

$$\overset{*}{=} \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}}\,dt = 2\pi i \quad \blacksquare$$

2) $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!\, n!} z^n$

a) $f'_{k-1}(z) = k \cdot f_k(z)$

$$f_{k-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\, n!} z^n$$

$$f'_{k-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+k-1)!}{(k-1)!\, n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(k-1)!\, n!} z$$

$$k \cdot f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k \cdot (n+k)!}{k!\, n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(k-1)!\, n!} z^n = f'_{k-1}(z)$$

b) $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$, con $a_n^k = \frac{(n+k)!}{k!\, n!}$

$$R^k = \lim_n \frac{|a_n^k|}{|a_{n+1}^k|} = \lim_n \frac{(n+k)!}{k!\, n!} \cdot \frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!} =$$

$$= \lim_n \frac{n \cdot (n+k)!}{(n+k+1)!} = \lim_n \frac{n}{n+k+1} = 1$$

$\Rightarrow$ El radio de convergencia de la serie es 1 $\forall k \in \mathbb{N}$

c) $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ porque $|z|<1$

$f_1(z) = \frac{f_0'(z)}{1} = \frac{1}{(1-z)^2} = (1-z)^{-2}$

$f_2(z) = \frac{f_1'(z)}{2} = \frac{+2\cdot(1-z)^{-3}}{2} = (1-z)^{-3}$

$\vdots$

$f_k(z) = (1-z)^{-(k+1)}$ fórmula explícita

Como $f_k(z) = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ $\forall z \in D(0,1)$

$f_k \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ ya que solo tiene una singularidad para $z=1$

d) Como $\lim_{z \to 1} f_k(z) = \infty \Rightarrow$ en $z=1$ hay un polo de multiplicidad $k+1$

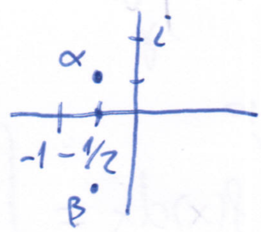
A

③ $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^2+z+1}$

a) f tiene polos cuando z^2+z+1 tenga ceros.

$$z^2+z+1=0 \Longrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\, i$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(z-\alpha)(z-\beta)} \qquad \text{con } \alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\, i$$
$$\beta = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{3}\, i$$



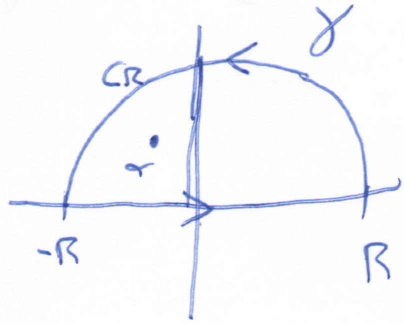
En el semiplano superior, f tiene un polo en el punto $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\, i$

$$\operatorname{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) f(z) = \frac{e^{i\pi\alpha}}{\alpha-\beta} = \frac{e^{i\pi(-1/2+\sqrt{3}i)}}{2\sqrt{3}\, i} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{2} - \sqrt{3}\pi}}{2\sqrt{3}\, i} = \frac{e^{-\sqrt{3}\pi}\, e^{-i\pi/2}}{2\sqrt{3}\, i} = \frac{e^{-\sqrt{3}\pi}\,(\cos -\pi/2 + i \operatorname{sen} -\pi/2)}{2\sqrt{3}\, i} =$$

$$= \frac{-i\, e^{-\sqrt{3}\pi}}{2\sqrt{3}\, i} = -\frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$ ✓

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+x+1}\, dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+x+1}\, dx$



$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,\alpha) = \frac{-2\pi i\, e^{-\pi\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}}\, i$$

$\parallel$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz$$

Por el lema de Jordan, como $g(z) \longrightarrow 0$ cuando $z \to \infty$

$\left(g(z) = \frac{1}{z^2+z+1}\right) \Rightarrow \int_{C_R} g(z) e^{i\pi z} dz \xrightarrow{R\to\infty} 0 \Leftrightarrow \int_{C_R} f(z) dz \xrightarrow{R\to 0} 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{-\pi e^{-\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+x+1}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}} i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+x+1}\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\sqrt{3}}$$

(2d) Al ser $z=1$ polo de multiplicidad $k+1$

$$\Rightarrow f_k(z) = \frac{a_{-(k+1)}}{(z-1)^{k+1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-1} + \cdots\cdots$$

Queremos saber a_{-1}.

$$(z-1)^{k+1} f(z) = a_{-(k+2)} + \cdots + a_{-1}(z-1)^{k}$$

Pero $(z-1)^{k+1} f(z) = (z-1)^{k+1} \cdot \dfrac{1}{(1-z)^{k+1}} = (-1)^{k+1}$

$\Rightarrow \text{Res}(f,1) = 0$ si $k \neq 0$

Si $k = 0 \Rightarrow \text{Res}(f,1) = -1$.

4. a) La fórmula de Cauchy en discos nos dice que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω abierto y $\overline{D_r(a)} \subset \Omega \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,r}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad \forall z \in D(a,r)$

En particular para a tenemos $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,r}} \frac{f(\omega)}{\omega - a} d\omega$

Tomando el cambio de variable $\left\{ \begin{array}{l} \omega = a + r \cdot e^{it} \\ d\omega = ri \cdot e^{it} \end{array} \right. \quad t \in [0, 2\pi] \Big\}$ nos queda

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r \cdot e^{it})}{r \cdot e^{it}} r i e^{it} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, dt$$

*(Demostración de la formula de Cauchy en discos por detrás).

b) Si $|f(z)|$ alcanzara un máximo estricto en $a \in \Omega$ existiría $r > 0 \,/\, \overline{D(a,r)} \in \Omega$ (por ser abierto $\exists R > 0 / D(a,R) \in \Omega$ y tomo $r = R/2$) y $|f(a)| > |f(z)| \quad \forall z \in \overline{D(a,r)}$ $\forall z \in$ Pero para dicho r el apartado a nos dice que $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, dt \Rightarrow$

ojo

$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_f \, dt = M_f$ donde $M_f = \max \{ |f(a + re^{it})| \,/\, t \in [0, 2\pi] \}$

Pero llegamos a una contradicción ya que para la circunferencia $C_{a,r}$ tenemos $|f(a)| > |f(z)|$ y $|f(a)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in C_{a,r}$

lo que $|f(z)|$ no alcanza un máximo estricto.

c) Sí. Por ejemplo la función $f(z) = z$ es $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|f(z)|$ alcanza un mínimo en $z = 0$.

Si suponemos que f no se anula $|f(z)|$ no puede alcanzar un mínimo ya que de ser así ~~estricto~~ tomamos $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Si $|f(z)|$ alcanza un mínimo estricto en $a \in \Omega \Rightarrow$ $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|}$ alcanza un máximo estricto, lo que contradice el apartado b).

... $\overline{D(a,r)} \subset \Omega \Rightarrow$

5º)

1'4

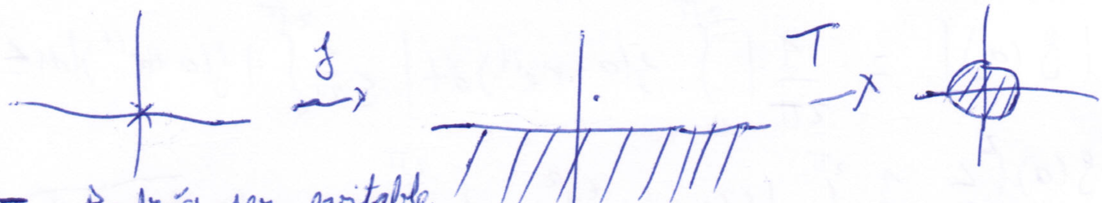
a) 

como $R>1$ podemos cambiar el centro del desarrollo de potencias a 1 con radio $r>0$

$$f(z)=\sum b_n (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n \underset{\text{hipótesis}}{=} \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

así que f es un polinomio de grado 4

como $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 5 \Rightarrow a_6 = 0$

b) 

– Podría ser evitable ~~No puede ser evitable~~ aunque si lo fuese e podríamos extenderla de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$ con lo que tendríamos una función contenida en $\mathbb{H}^+$ y al componerla con una transformada de Moebius adecuada quedaría en un disco y sería constante

bien!

Nota → (como $f \in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ debe ser aislada).

– ~~Polo: ...~~

– No puede ser esencial pues si lo fuese tomando $r=1$ como $D(0,r)\setminus\{0\} \subseteq \Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow \overline{f(D(0,r)\setminus\{0\})} = \mathbb{C}$ cosa que no ocurre pues $f(D(0,r)\setminus\{0\}) \subseteq \mathbb{H}^+$

¿Puede ser polo?

$$\left(f/g\right)' = \frac{f'\cdot g - g'f}{g^2}$$

c) $$\frac{g'(a_n)}{g(a_n)} = \frac{f'(a_n)}{f(a_n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{acumulación de ceros de} \\ \frac{g'}{g}-\frac{f'}{f}}}{\Rightarrow} \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} \Rightarrow g'\cdot f = f'\cdot g$$

$$g'f - f'g = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - g'\cdot f}{g^2} = 0 \Rightarrow \frac{f}{g} = cte \Rightarrow f = g\cdot cte$$

5.b)

- Si en f tiene un polo $\Rightarrow g = \frac{1}{f}$ tiene un 0

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \to 0} g(z) = 0$$

Si $Re(f(z)) > 0$ entonces $Re(g(z)) \geq 0$

Pero si tiene un cero en 0 $Re(g(0)) = 0$ #