A

a) Determina si la función $f(x+iy) = e^x(\cos(2y) + i\,\mathrm{sen}(2y))$ es derivable en algún punto.

b) Demuestra que si $f = u + iv$ es holomorfa en un abierto conexo Ω, y se cumple

$$u^2 + v^4 = cte$$

entonces f es necesariamente constante.

a) $f(x+i.y) = u(x,y) + i.v(x,y) = e^x.\cos 2y + i\,e^x.\sin 2y$. f es holomorfa (derivable) si y sólo si cumple las igualdades:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

que, en nuestro caso equivale a que se dé:

$$\left.\begin{array}{l} u_x = e^x.\cos 2y = e^x.\cos 2y \cdot 2 = v_y \\ u_y = -e^x.\sin 2y \cdot 2 = -e^x.\sin 2y. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} e^x(\cos 2y - 2\cos 2y) = 0 \\ e^x(2\sin 2y - \sin 2y) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x.(-\cos 2y) = 0 \\ e^x.\sin 2y = 0. \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \cos 2y = 0 \\ \sin 2y = 0 \end{array}\right\} \text{ imposible pues } \cos^2 2y + \sin^2 2y = 1$$

luego f no es holomorfa en ningún punto. ✓

b) Si f es holomorfa en un abierto se cumple:

$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$. De $u^2+v^4 = cte.$ y derivando parcialmente

respecto de x e y obtenemos: $\begin{cases} 2u.u_x + 4v^3.v_x = 0 \\ 2u.u_y + 4v^3.v_y = 0 \end{cases}$

sustituyendo ~~da~~ obtenemos

$$\begin{aligned} 2u \cdot u_x + 4v^3 \cdot (-u_y) &= 0 \\ 2u \cdot u_y + 4v^3 \cdot u_x &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2u & -4v^3 \\ 4v^3 & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene solución distinta de $u_x = u_y = 0$

sólo si $\underset{\begin{vmatrix} 2u & -4v^3 \\ 4v^3 & 2u \end{vmatrix}}{\underset{\shortparallel}{4u^2 + 16v^6}} = 0$, pero tal igualdad

$4u^2 + 4v^6 = 0$

$\Downarrow$

en términos de reales implica que $u = v = 0$, con

lo que usando $u^2+v^4=$ cte $f \equiv 0$ y por tanto constante. Si

u y v no son idénticamente nulas, entonces ha

de darse que $u_x = u_y = 0$, con lo que u es

constante, y por la igualdad ~~da~~ inicial de

$u^2 + v^4 =$ ctte, esto implica que v también lo es,

y por tanto lo es f.