Funciones de Variable Compleja

Hoja 1: El plano complejo

1. Encuentra una expresión binomial y/o polar para los siguientes números complejos

$$(a)\ \tfrac{1}{3+4i} \qquad (b)\ \sqrt{3+4i} \qquad (c)\ (1+i)^4 \qquad (d)\ (\sqrt{3}+i)^7 \qquad (e)\ (\tfrac{2+i}{1+i})^2 \qquad (f)\ \textstyle\sum_{n=1}^{100} i^n$$

2. Probar que no existe ningún orden total en $(\mathbb{C},+,\cdot)$. Es decir, una operación "$\prec$" con las propiedades

   (i) $\forall\ z,w\in\mathbb{C}$ se tenga que $z\prec w$ o bien $w\prec z$ o bien $z=w$

   (ii) si $z_1\prec z_2$ entonces $z_1+w\prec z_2+w$, $\forall\ w\in\mathbb{C}$, y $z_1w\prec z_2w$, $\forall w\succ 0$.

   Sugerencia: suponer $i\succ 0$ y buscar una contradicción.

3. Demuestra las siguientes propiedades, si $z,w\in\mathbb{C}$.

   (i) $|z+w|\geq\big||z|-|w|\big|$

   (ii) $|z+w|=|z|+|w|$ si y sólo si $z=\lambda w$ para algún $\lambda\geq 0$ (o bien $w=0$)

   (iii) Regla del paralelogramo: $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$

   (iv) utiliza (iii) para hallar $\min_{z\in\mathbb{C}}\big\{|z-a|^2+|z-b|^2\big\}$.

4. (i) Demuestra que $\frac{z+w}{z-w}$ es imaginario puro si y sólo si $|z|=|w|$. ¿Cuándo es $\frac{z+w}{z-w}=i$?

   (ii) Demuestra que, si $|a|<1$, entonces $|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}|\leq 1$ si y sólo si $|z|\leq 1$. ¿Cuándo se tiene igualdad?

   Sugerencia: En (i) calcula la parte real de $\frac{z+w}{z-w}$. En (ii) estudia cuándo se tiene $|z-a|^2\leq|1-\bar{a}z|^2$.

5. Dibuja los siguientes conjuntos de puntos en el plano complejo

$$(a)\ \Re e\, z=3 \qquad (b)\ \frac{1}{z}=\bar{z} \qquad (c)\ |z|=|z-1| \qquad (d)\ |z+4i|+|z-4i|=10 \qquad (e)\ |z|=\Re e\, z+1$$

6. Sean $a,b\in\mathbb{C}$, con $b\neq 0$.

   (i) Demuestra que $\Im m\left(\frac{z-a}{b}\right)=0$ es una recta que pasa por a y tiene la misma dirección que b. Escribe la recta como $Az+B\bar{z}+C=0$, determinando los valores de A,B,C.

   (ii) Escribe la circunferencia $|z-a|=r$ de la forma $z\bar{z}+Az+B\bar{z}+C=0$, determinando A,B,C.

7. Esboza los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

$$(a)\ \left\{z:\Im m\left(\frac{z-i}{1+i}\right)>0\right\} \qquad (b)\ \left\{z:\Re e\left(\frac{z}{i}\right)>1\right\} \qquad (c)\ \{z:|z|^2+2\Re e\,(iz)<1\}$$

8. Demuestra que $\pi/4=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$ mediante el producto de dos complejos adecuados. Del mismo modo, trata de probar que $\pi/4=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$.

9. (i) Encuentra una fórmula para $\operatorname{sen}(3\theta)$ en términos del $\operatorname{sen}\theta$.

   (ii) Demuestra que $\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta=\dfrac{\operatorname{sen}(2n\theta)}{2\operatorname{sen}\theta}$.

10. Calcula y dibuja las siguientes raíces complejas $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[3]{-8i}$.

Opcionales

11. Demuestra que la proyección estereográfica transforma los círculos C de S^2 en círculos de $\mathbb{C}$ (o en rectas si C contiene el polo norte).

12. Demuestra que la distancia cordal en $\mathbb{C}^\sharp$ cumple

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \quad z,w \in \mathbb{C}, \quad \text{y} \quad \chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deduce que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ en $\mathbb{C}^\sharp$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \chi(z_n, z) = 0$.

13. (i) Demuestra que la distancia cordal es máxima $\chi(z,w) = 2$ si y sólo si $w = -1/\bar{z}$.

(ii) Comprueba que si $w = -1/\bar{z}$ entonces $|z-w| \geq 2$.

(iii) Demuestra que si $|z-w| \geq 2$, entonces existe algún $a \in \mathbb{C}$ tal que $z - a = -1/\overline{(w-a)}$.

Sugerencia: En (iii), con una rotación y traslación adecuadas puedes suponer $w = 0$ y $z \geq 2$.

14. * Para $z, w \in \mathbb{C}$ fijos, determina los valores máximo y mínimo de $\chi(z-a, w-a)$ cuando $a \in \mathbb{C}^\sharp$.

Sugerencia: Para el máximo, si $|z-w| \geq 2$ utiliza el ejercicio 13; si $|z-w| < 2$, redúcelo al caso $z = R$ y $w = -R$ con $R \in (0,1)$.

15. * La ecuación de tercer orden $x^3 = 3px + 2q$ tiene como solución real

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}. \tag{†}$$

Obtén justificadamente esta expresión con los siguientes pasos

(i) Escribe $x = u + v$, y deduce que si $u^3 + v^3 = 2q$ y $uv = p$, entonces x es una solución de la ecuación.

(ii) Eliminando v, y concluye que u^3 debe cumplir la ecuación cuadrática $u^6 + p^3 = 2qu^3$.

(iii) Encuentra una expresión para u^3, y por simetría, otra expresión para v^3.

(iv) Puesto que debemos tener $u^3 + v^3 = 2q$, deduce la fórmula (†)

(v) Demuestra que las otras dos soluciones de la ecuación cúbica vienen dadas por

$$x_2 = S_+\omega_+ + S_-\omega_- \qquad \text{y} \qquad x_3 = S_+\omega_- + S_-\omega_+$$

donde $S_\pm = \sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 - p^3}}$ y $\omega_\pm = e^{\pm i2\pi/3}$.

(vi) Utiliza la fórmula (†) para obtener una solución *real* de $x^3 = 15x + 4$.