Funciones de Variable Compleja

Hoja 3: Exponencial, trigonométricas y logaritmos complejos

1. Demuestra que $\operatorname{sen} z = 0$ si y sólo si $z \in \pi\mathbb{Z}$, y $\cos z = 0$ si y sólo si $z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$
2. Demuestra las fórmulas
$$\operatorname{sen}(z+w)\operatorname{sen}(z-w) = \operatorname{sen}^2 z - \operatorname{sen}^2 w \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}+z\right) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-z\right) = \cos z.$$
3. El seno y coseno hiperbólicos de un número complejo z se definen como
$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$
   a) Demuestra que $\operatorname{senh} z = -i\operatorname{sen}(iz)$ y $\cosh z = \cos(iz)$.
   b) Encuentra una serie de potencias para $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$
   c) Demuestra que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
   d) Encuentra una fórmula para $\operatorname{senh}(z+w)$ y $\cosh(z+w)$.
4. a) Calcula las partes real e imaginaria de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$, en términos de $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cosh y$, $\operatorname{senh} y$.
   b) Demuestra que $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$ y $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.
5. **V ó F** (justificar).
   a) $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$
   b) $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$
   c) si $a \in [-1,1]$ entonces $\cos z = a$ sólo tiene soluciones reales
   d) si $a > 1$ entonces $\cos z = a$ sólo tiene soluciones imaginarias puras.
6. Sea $f(z) = e^{e^z}$.
   a) Calcula $\Re e\, f(z)$, $\Im m\, f(z)$ y $|f(z)|$
   b) Encuentra todas las soluciones de $f(z) = 1$.
7. a) Demuestra que si $\theta_0 \in \arg z$ entonces se tiene la igualdad $\arg z = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.
   b) Demuestra que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$, pero en general $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$
   c) Demuestra que $\arg(z^n) \supseteq n\arg(z)$, pero en general la inclusión es estricta.
8. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\operatorname{Arg}_\alpha z = \arg(z) \cap \big(\alpha - \pi, \alpha + \pi\big)$.
   a) Demuestra que $\operatorname{Arg}_\alpha z = \alpha + \operatorname{Arg}(e^{-i\alpha} z)$
   b) Deduce que $\operatorname{Arg}_\alpha$ es continua en $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$, donde $L_\alpha = \{re^{i\alpha} \;:\; r \leq 0\}$.
   c) Deduce que $\operatorname{Log}_\alpha z := \ln|z| + i\operatorname{Arg}_\alpha z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$, y encuentra una relación con $\operatorname{Log} z$
9. **V ó F:**
   a) $\operatorname{Log}(i^3) = 3\operatorname{Log}(i)$
   b) $\log(i^3) = 3\log(i)$
   c) $\log(i^3) = 3\operatorname{Log}(i) + i2\pi\mathbb{Z}$

10. a) Determina dónde son holomorfas $\mathrm{Log}(z-1)$ y $\mathrm{Log}(1-z)$

    b) Demuestra que $\mathrm{Log}(1-z) = \mathrm{Log}(z-1) - i\pi$, si $z \in \mathbb{H} = \{\Im m\, z > 0\}$

    c) Demuestra que $\mathrm{Log}(1-z) = \mathrm{Log}(z-1) + i\pi$, si $z \in \mathbb{H}_- = \{\Im m\, z < 0\}$

11. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ son distintas de cero y cumplen

$$f(z)^2 = g(z)^2, \quad \forall\, z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$$

    demuestra que, en cada componente conexa de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ se tiene que, o bien $f \equiv g$, o bien $f \equiv -g$.

12. Determina dónde son holomorfas y relaciona entre sí las siguientes funciones

$$f_1(z) = \sqrt{z^2-1}, \qquad f_2(z) = i\sqrt{1-z^2}, \qquad f_3(z) = z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$$

    donde $\sqrt{\ }$ denota la determinación principal de la raíz.

    Sugerencia: Para relacionar entre sí, utiliza el ejercicio 11.

Opcionales:

13. **V/F:** justifica si para todo $w \in \mathbb{C}$ se cumple

    a) $\mathrm{Log}(e^w) = w$

    b) $\log(e^w) = w + 2\pi i\mathbb{Z}$

    c) $\mathrm{Log}(e^w) + 2\pi i\mathbb{Z} = w + 2\pi i\mathbb{Z}$

14. * Encuentra una fórmula para $\arcsin z$ y determina en qué dominio está definida y es holomorfa. Encuentra también una expresión para su derivada.

15. Si $z \neq 0$ y $w \in \mathbb{C}$ se define la potencia multivaluada $[z^w] := e^{w \log z}$

    a) Calcula $[i^i]$ y $[e^{i\pi}]$

    b) Demuestra que $[z^n] = \{z^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$

    c) Demuestra que $[z^{p/q}] = \{\, \xi\, e^{\frac{2\pi i k p}{q}} \;:\; k = 0, \ldots, q-1\}$, donde $\xi = [z^{p/q}]_P$ es la potencia principal.

    d) Demuestra que Card $[z^w] < \infty$ si y sólo si $w \in \mathbb{Q}$.

16. * Demuestra las siguientes inclusiones, y comprueba con un ejemplo que en general son estrictas

    a) $[z^{w_1+w_2}] \subset [z^{w_1}][z^{w_2}]$

    b) $[z^{w_1 \cdot w_2}] \subset [z^{w_1}]^{w_2}$

    c) $w \log z \subset \log[z^w]$