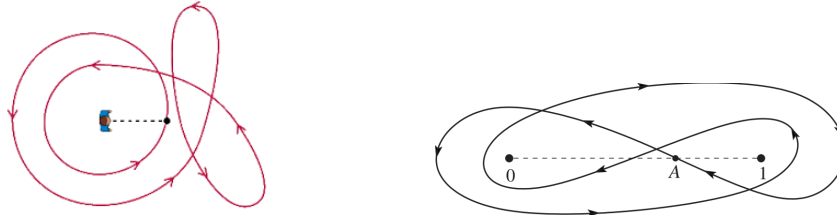


1. Esboza la gráfica y determina el índice  $I(\gamma, z_0)$  en los siguientes casos

(a)  $\gamma(t) = 2 \operatorname{sen} t + i \cos t, t \in [0, 4\pi]$ , en  $z_0 = 0$       (b)  $\gamma(t) = (\cos t)^2 e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ , en  $z_0 = 1/2$

2. Calcula el índice de la curva  $\gamma$  del dibujo en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$



3. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  continua y cerrada.

a) Demuestra que  $I(\gamma, 0) = -I(1/\gamma, 0)$ .

b) Si  $z_0$  y  $1/z_0$  están en  $\mathbb{C} \setminus (\gamma^* \cup \{0\})$ , demuestra que  $I(1/\gamma, 1/z_0) = I(\gamma, z_0) - I(\gamma, 0)$ .

*Sugerencia:* En b) puedes usar la identidad  $\gamma - z_0 = (\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\gamma}) z_0 \gamma$ .

4. Si  $\gamma$  es un arco cerrado tal que  $\gamma^* \subset \Omega$  y sea  $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ , demuestra que

$$I(F \circ \gamma, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z) - w_0} dz, \quad \forall w_0 \in \mathbb{C} \setminus F(\gamma^*).$$

Deduce que si  $F(z) = az + b$  (con  $a \neq 0$ ) entonces  $I(F \circ \gamma, F(z_0)) = I(\gamma, z_0)$ , es decir el índice es invariante respecto a traslaciones, dilataciones y rotaciones.

5. Deduce del teorema homológico de Cauchy que, en las mismas condiciones y para cada  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$f^{(n)}(z) I(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*.$$

*Sugerencia:* Derivar adecuadamente la fórmula de Cauchy en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ .

6. Calcular el valor de  $a$  para que la función

$$f(z) := \left( \frac{1}{z} - \frac{a}{z^3} \right) e^z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

tenga una primitiva holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

7. Determina qué abiertos son simplemente conexos

- (a)  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$       (b)  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$       (c)  $\{x + iy \in \mathbb{C} : y \in (0, 1)\}$   
 (d)  $\mathbb{D} \setminus [0, 1)$       (e)  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ , con  $\gamma(t) = te^{it}, t \in [0, \infty)$       (f)  $\mathbb{C} \setminus \left[ \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{n} + i\mathbb{R}^+) \cup \{i\} \right]$

8. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplemente conexo. Si  $\Delta$  es un disco tal que  $\partial\Delta \subset \Omega$ , demuestra que entonces debe cumplirse  $\bar{\Delta} \subset \Omega$ .

9. \* Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dominio, y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  no nula. Demuestra que son equivalentes

a)  $\int_{\gamma} (f'/f) dz = 0$ , para todo arco cerrado  $\gamma^* \subset \Omega$

b)  $f$  tiene un logaritmo holomorfo en  $\Omega$

c) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  tiene una raíz  $n$ -sima holomorfa en  $\Omega$ .

**V/F:** ¿Podemos añadir d) “ $f$  tiene una raíz cuadrada holomorfa en  $\Omega$ ”?

*Sugerencia:* En “a) $\implies$ b)”, consulta la demostración del Teorema 4 de clase. En “c) $\implies$ a)”, observa que  $I = \int_{\gamma} f'/f \in 2\pi\mathbb{Z}$ , y usando c) demuestra que de hecho  $I \in 2\pi n\mathbb{Z}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , lo que implicará  $I = 0$ . En d) prueba con  $f(z) = z^2$  en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .