

1. Para cada función, determina las singularidades aisladas, su tipo y su orden (si son polos).

$$(a) \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} \quad (b) \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z+1)^4} \quad (c) \frac{e^z}{z(1-e^{-z})} \quad (d) z^4 \operatorname{sen}(1/z)$$

$$(e) \cos(z + z^{-1}) \quad (f) \frac{z-1}{1-\sqrt[3]{2-z}}$$

En el caso de polos o evitables, determina además el primer coeficiente no nulo a_n , $n \in \mathbb{Z}$, de su serie de Laurent.

2. Suponer que $f \in \mathcal{H}(D'_R(z_0))$ tiene un polo en z_0 de orden N . Demuestra que los coeficientes de la serie de Laurent de f entorno a z_0 vienen dados por

$$a_n = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[(z - z_0)^N f(z)]^{(n+N)}}{(n+N)!}, \quad n \geq -N.$$

3. Desarrollar en serie de Laurent, entorno a los puntos z_0 , indicando los radios de convergencia

$$(a) \frac{1}{z-2} \text{ en } z_0 = 0, \infty \quad (b) \frac{1}{(z^2+1)^2} \text{ en } z_0 = i, \infty \quad (c) z^2 e^{1/z} \text{ en } z_0 = 0$$

$$(d) z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right) \text{ en } z_0 = 1 \quad (e) \operatorname{Log}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \text{ con } z_0 = 0, \infty$$

4. Hallar 3 desarrollos de Laurent diferentes para $f(z) = \frac{5z+2}{z(z+1)(z-2)}$ entorno a $z_0 = -1$, indicando en cada caso las regiones de convergencia.

Sugerencia: usa fracciones simples.

5. Sea $f(z) = 1/(\operatorname{sen} z - z)$. Desarrollando el denominador en serie de potencias, trata de calcular los dos primeros coeficientes no nulos de la serie de Laurent de f entorno al origen.

Nota: Puedes utilizar Maxima para comprobar el resultado, o para calcular más elementos de la serie de Laurent.

6. Los números de Bernoulli B_n se definen mediante la igualdad

$$f(z) := \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi.$$

a) Demuestra que $B_0 = 1$ y $B_1 = -1/2$

b) Demuestra que $B_{2n+1} = 0$, para todo $n \geq 1$

c) Demuestra que $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j = 0$, para todo $n > 1$. Deduce que B_n es racional, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia: En b) prueba que $f(z) + z/2$ es una función par. En c), calcula la series de potencias de $(e^z - 1)f(z)$ e iguala a z .

7. Utiliza los números de Bernoulli para calcular las series de Laurent en el origen de

$$(a) \frac{e^z}{(e^z - 1)^2} \quad (b) \frac{z}{\tanh z} \quad (c) \tan z = \frac{1}{\tan z} - \frac{2}{\tan(2z)}$$

8. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tal que $|f(z)| \leq A|z|^{\frac{1}{2}} + B|z|^{-\frac{1}{2}}$. Demuestra que $f \equiv \text{constante}$.

9. Sea f holomorfa en $\Omega = D'_R(z_0) \setminus \{z_n\}_{n=1}^\infty$, donde z_n es una sucesión de polos de f que converge a z_0 . Demuestra que $f(\Omega)$ es denso en \mathbb{C} . ¿Conoces algún ejemplo de una tal f ?
- Sugerencia:* Suponer (por RA) que $|f(z) - b| \geq \varepsilon$ para algún b y ε , y definir $h(z) = 1/(f(z) - b)$.
10. a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es un polinomio, demuestra que $f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$
- b) Deduce que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C}
- c) Deduce que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, entonces f es un polinomio.