Funciones de Variable Compleja

Hoja 8: Teorema de los residuos y aplicaciones

1. Sea $f(z) = p(z)/q(z)$, con $p, q \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea $a \in \mathcal{Z}_q(\Omega)$.

   a) Si $m(a, q) = 1$ y $p(a) \neq 0$, demuestra que $\operatorname{Res}(f, a) = \frac{p(a)}{q'(a)}$.

   b) Encuentra una fórmula en el caso en que $m(a, q) = N$ y $m(a, p) = N - 1$.

2. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades aisladas

$$(a)\ \frac{1}{z^3 - z^5} \qquad (b)\ \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(1+z)^3} \qquad (c)\ z^2 \cos(\tfrac{1}{z-2}) \qquad (d)\ \frac{1}{z^2 \tan(\pi z)}$$

3. Utiliza contornos semicirculares para calcular las siguientes integrales (donde $a > b > 0$ y $n \in \mathbb{N}$)

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2} \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$$(d)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad (e)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} \qquad (f)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2n}\,dx}{1+x^{4n}}$$

4. Transforma las integrales trigonométricas en racionales, y calcula por el método de residuos

$$(a)\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \operatorname{sen} t} \qquad (b)\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + a^2 - 2a\cos t}, \quad |a| < 1$$

5. Utiliza contornos adecuados para calcular las siguientes integrales

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{1+x^4} \qquad (b)\ \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(2x)\,dx}{x^2+3} \qquad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$$

$$(d)\ \int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx \qquad (e)\ \int_0^{\infty} \frac{\log x\,dx}{1+x^2} \qquad (f)\ \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2\,dx}{1+x^2}$$

6. * Si $a > 0$ y $a \neq 1$, demuestra que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(\pi^2 + (\ln x)^2)} = \frac{1}{\ln a} + \frac{1}{1-a}.$$

   Trata de obtener un valor para esta integral cuando $a = 1$.

   Sugerencia: Utiliza un contorno de tipo cerradura aplicado a la función $f(z) = 1/[(z+a)((\operatorname{Log}_{(0,2\pi)} z) - \pi i)]$. En el caso $a = 1$ observa que $z = -1$ es un polo doble de f.

7. Aplica el teorema de residuos a $g(z)/\tan(\pi z)$, o bien a $g(z)/\sin(\pi z)$, con $g(z)$ adecuada, para obtener el valor explícito de las siguientes series

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad (c)\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} \quad (\text{si } a > 0)$$

8. a) Probar que $p(z) = z^4 + 6z + 3$ tiene todas sus raíces en el disco $|z| < 2$, y que tres de ellas están en el anillo $\{1 < |z| < 2\}$.

   b) Hallar el número de raíces de $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$ en el anillo $\{2 < |z| < 3\}$.

   c) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $e^z = 4z^n - 1$ en el disco unidad?

9. * Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, y sean $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente sobre compactos de Ω. Sea $\Delta = \overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Demostrar

a) si $f|_{\partial\Delta} \neq 0$ entonces existe n_0 tal que Card $\mathcal{Z}_{f_n}(\Delta) =$ Card $\mathcal{Z}_f(\Delta)$, $\forall\, n \geq n_0$

b) si $f_n \neq 0$ en Ω (para todo n), entonces o bien f tampoco se anula en Ω, o bien $f \equiv 0$

c) si f_n son inyectivas en Ω, entonces o bien f también es inyectiva, o bien $f \equiv$ cte.

Sugerencia: En a) usar que $f_n'/f_n \to f'/f$ unif en $\partial\Delta$, y que Card $\mathcal{Z}_f(\Delta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} f'/f$, por el principio del argumento. En c), suponer que existen $z_1 \neq z_2$ en Ω con $f(z_1) = f(z_2) = b$, y aplicar a) a las funciones $g_n(z) = f_n(z) - b$.

Soluciones:

2.- (a) $-\frac{1}{2}$ y 1 (si $a=0$) (b) $2\operatorname{sen}2$ (c) -2 (d) $\frac{1}{\pi n^2}$ (si $a=n\neq 0$), $-\frac{\pi}{3}$ (si $a=0$)

3.- (a) $\frac{-\pi}{27}$ (b) $\frac{\pi}{2a}$ (c) $\frac{\pi}{(a+b)ab}$ (d) $\frac{\pi}{2^{2(n-1)}}\binom{2n-2}{n-1}$ (e) $\frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2n})}$ (f) $\frac{\pi/(2n)}{\cos(\frac{\pi}{4n})}$

4.- (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2\pi}{1-a^2}$

5.- (a) $\pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}e^{-2\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\pi\cos a}{b\,e^b}$ (d) $\frac{\pi}{2}$ (e) 0 (f) $\frac{\pi^3}{8}$

7.- (a) $\frac{\pi^3}{32}$ (b) $\frac{\pi/2}{\tanh\pi}+\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi/a}{\operatorname{senh}(\pi a)}$