Variable Compleja, 3º Matemáticas
Examen enero 2024

Nombre y DNI: ....

1. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ con $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$.

   a) demuestra que $|f(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$

   b) si existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, demuestra que $f(z) = cz$ para algún $|c| = 1$

   c) demuestra que a) sigue siendo cierto sin la hipótesis $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$

   Sugerencia: aplica el PMM a la función $g(z) = f(z)/z$, adecuadamente extendida a todo $\mathbb{D}$. En c), aplica lo anterior a la función $f_r(z) = f(rz)$ y haz $r \nearrow 1$.

   Nota: 1'5 puntos

2. Justifica el siguiente paso de la demostración del Teorema Homológico de Cauchy: dada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, definimos las funciones auxiliares

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}, & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases} \quad \text{y} \quad h(z) := \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta,$$

   donde $\xi, z \in \Omega$ y $\Gamma^* \subset \Omega$. Sabiendo que $g \in C(\Omega \times \Omega)$, demuestra que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

   Observación: Debes enunciar con sus hipótesis los resultados que utilices.

   Nota: 1 punto

3. Sea $Tz = -i\, \frac{z-1}{z+1}$ y $f(z) = \mathrm{Log}\big(Tz\big)$.

   a) Demuestra que T manda $\partial\mathbb{D}$ en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

   b) Determina el mayor abierto Ω donde $f(z)$ es holomorfa

   c) Calcula la serie de Laurent de $f(z)$ en $|z| > 1$, dando un valor para a_0, a_{-1} y a_{-2}

   d) Calcula las integrales $\int_{|z|=2} f(z)\, dz$ y $\int_{|z|=1/2} \frac{e^{f(z)}}{z^2}\, dz$

   Observación: Se valorarán dibujos de las regiones y curvas.

   Nota: 3 ptos

4. Utilizando el teorema de los residuos, demuestra

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^4}\, dt \;=\; -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}.$$

   Debes justificar adecuadamente los límites de las integrales que aparecen.

   Nota: 2 ptos

5. **V ó F** (justifica la respuesta):

   a) Las series $\sum \frac{z^n}{3^n}$ y $\sum \frac{z^{3^n}}{3^n}$ tienen el mismo radio de convergencia

   b) Existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\sqrt{|z|}} = 1$

   c) Existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ no constante con $f(\frac{1}{2n})f'(\frac{1}{2n+1}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

   d) La ecuación $3 - z^3 = e^{z-1}$ no tiene soluciones en el disco $\{|z| < 1\}$.

   e) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $f(z) \neq \pm 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f = \cos h$.

   Nota: 2'5 ptos

SOLUCIONES

1) Sea $f \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$: $f(0)=0$, $|f(z)| \le 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

ⓐ Sea $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & , z \neq 0 , |z| \le 1 \\ f'(0) & , z = 0 \end{cases}$

$\to \quad g \in H(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}) \xrightarrow{\text{Corol CG}} g \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$

$\xrightarrow{\text{Corol PMM}} \quad \max_{|z| \le 1} |g(z)| = \max_{|z|=1} |g(z)| = \max_{|z|=1} \dfrac{|f(z)|}{\underset{1}{|z|}} \le 1$

Por tanto $|g(z)| = \dfrac{|f(z)|}{|z|} \le 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow \quad |f(z)| \le |z|$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

ⓑ Si $\exists \underset{(z_0 \neq 0)}{z_0 \in \mathbb{D}}$: $|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow |g(z_0)| = 1$

$\overset{PMM}{\Rightarrow} \quad g(z) \equiv \text{ctant} \Rightarrow g(z) \equiv c$ con $|c| = 1$

$\Rightarrow \quad f(z) = c \cdot z$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

ⓒ Quitamos la hipótesis $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ en ⓐ.

Si $r<1$, considero $f_r(z) := f(rz) \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$

(de hecho f_r es hol en $|z| < 1/r$)

Claramente, $f_r(0) = 0$ y $|f_r(z)| \le 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$

$\overset{ⓐ}{\Rightarrow} \quad \left. \begin{array}{l} \underset{\displaystyle |f(rz)|}{\underset{\parallel}{|f_r(z)|}} \le |z| \\ \forall z \in \mathbb{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{r \nearrow 1}} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |f(z)| \le |z| \\ \forall z \in \mathbb{D} \end{array} \right\}.$

(2) Dada $f \in H(\Omega)$ definimos

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \end{cases} \quad \text{y} \quad \boxed{h(z) := \int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi}$$

$\xi, z \in \Omega$

En clase probamos que $g \in C(\Omega \times \Omega)$.

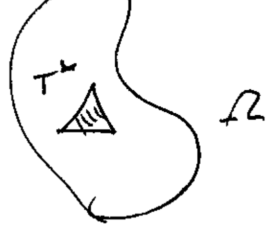
Sabiendo esto tenemos (por T(D)) que

$$h(z) = \int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi \quad \text{es cont } z \in \Omega.$$

Para ver la holomorfía de h usamos el Tma Morera

$$\boxed{\text{Si } h \in C(\Omega) \text{ y } \int_T h(z)\, dz = 0, \ \forall \text{ triang } T : co(T^*) \subseteq \Omega \ \Rightarrow \ h \in H(\Omega)}$$

Sea T = triangulo: $co(T^*) \subseteq \Omega$,



entonces por Fubini (pues $g \in C(\Omega \times \Omega)$)

$$\int_T h(z)\, dz = \int_T \left[\int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi \right] dz$$

$$= \int_\Gamma \left[\int_T g(\xi, z)\, dz \right] d\xi$$

Cuando $\xi \in \Omega$ está fijo sabemos que la función

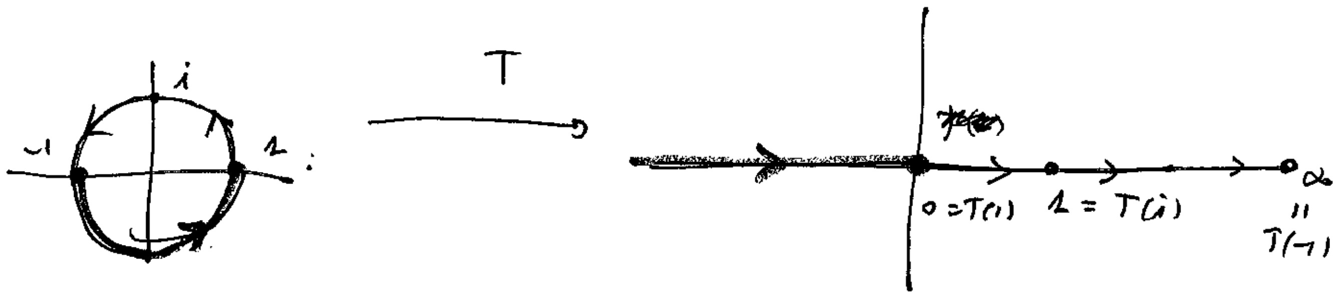
$$g_\xi(z) := g(\xi, z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi}, & z \neq \xi \\ f'(\xi), & z = \xi \end{cases}$$

es $C(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{\xi\}) \Rightarrow g_\xi \in H(\Omega)$ por Corol C-G.

Por el Tma C-G concluimos que $\int_T g_\xi(z)\, dz = 0$.

③ $Tz = -i\,\dfrac{z-1}{z+1}$, $\qquad f(z) = \mathrm{Log}\,(Tz)$.

ⓐ Sabemos que $T \in \mathcal{M}$, y comprobando con 3 ptos vemos que



$$\left.\begin{array}{l} T1 = 0 \\ T(-1) = \infty \end{array}\right\} \quad T(i) = -i\,\frac{i-1}{i+1} = -i\,\frac{e^{i3\pi/4}}{e^{i\pi/4}} = -i\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 1$$

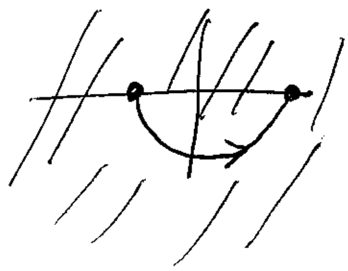
Por tanto, como T manda círculos en rectas, concluimos $\quad T(\partial \mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

ⓑ $f(z)$ es holom si $Tz \notin (-\infty, 0]$

En el dibujo de ⓐ vemos que

$$T(z) \in (-\infty, 0] \iff z \in C^- = \{e^{it} \,/\, t \in [-\pi, 0]\}$$

Por tanto, $\quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus C^-)$



ⓒ Sea $\quad f(z) = \mathrm{Log}(Tz) = \mathrm{Log}\left(-i\,\frac{z-1}{z+1}\right)$

$$= \mathrm{Log}(-i) + \mathrm{Log}(z-1) - \mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{cte}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} = \frac{2}{z^2-1}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} \underset{|z|>1}{=} \frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+2}} \quad |z|>1$$

Integrando t^{no} a t^{no}

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-2n-1}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}} + C \quad , \quad |z|>1$$

Como $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \operatorname{Log}\left(-i\,\frac{z-1}{z+1}\right) = \operatorname{Log}(-i) = -i\frac{\pi}{2}$

$\qquad\quad \| $

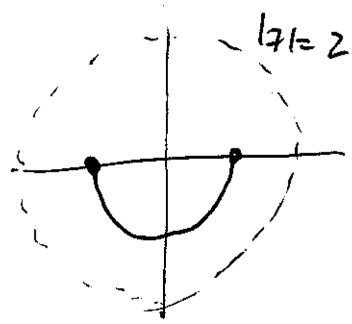
$\qquad\quad C \quad \Rightarrow \quad C = -i\pi/2$

$$\Rightarrow \quad f(z) = -i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{2n+1}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}} \quad , \quad |z|>1$$

$$\rightarrow \quad a_0 = -i\frac{\pi}{2}, \quad a_{-1} = -2 \quad , \quad a_{-2} = 0$$

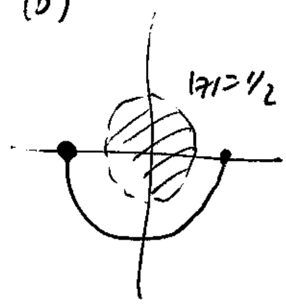
(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz \underset{\uparrow}{=} 2\pi i\cdot a_{-1} = -4\pi i$

Serie Laurent
conv abs + unif



$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{f(z)}}{z^2}\,dz = \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{T(z)}{z^2}\,dz \underset{\uparrow}{=} 2\pi i\; T'(0)$$

T me Cauchy
en disco



Como $T'(z) = -\frac{2i}{(z+1)^2} \rightarrow T'(0) = -2i$

$$\Rightarrow \quad \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{f(z)}}{z^2}\,dz = 2\pi i\,(-2i) = 4\pi \quad //$$

5) V/F

(a) $\sum \frac{z^n}{3^n} = \sum \left(\frac{z}{3}\right)^n \longrightarrow$ radio $R = 3$

$\sum \frac{z^{3^n}}{3^n} \rightarrow a_j = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{si } j = 3^n \\ 0, & \text{si } j \neq 3^n \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} \underset{\boxed{\text{subsuc } j = 3^n}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right)^{\frac{1}{3^n}} = \lim \frac{1}{3^{\frac{n}{3^n}}} = \frac{1}{3^0} = 1$

$\longrightarrow$ los radios son distintos. F

(b) Sea $f \in H(\mathbb{D})$: $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\sqrt{|z|}} = 1$

Si $f(0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\sqrt{|z|}} = \frac{f(0)}{0} = \infty$ ↯

Si $f(0) = 0 \Rightarrow f(z) = z^m \cdot g(z)$ con $g \in H(\mathbb{D})$, $g(0) \neq 0$ (y $m \geq 1$)

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\sqrt{|z|}} = \lim_{z\to 0} \frac{z^m \cdot g(z)}{\sqrt{|z|}} = 0$ ↯.

$\longrightarrow$ F

(c) Si $f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ o bien $A := \left\{ \frac{1}{2n} \;/\; f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0 \right\}$
o bien $B := \left\{ \frac{1}{2n+1} \;/\; f'\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0 \right\}$ es un cjto infinito

Si $\text{card}(A) = \infty \Rightarrow A \cup \{0\} \subseteq Z_f$ y 0 es pto acum $\overset{PPA}{\Longrightarrow} f \equiv 0$.

Si $\text{card}(B) = \infty \Rightarrow B \cup \{0\} \subseteq Z_{f'}$ y 0 es pto acum $\overset{PPA}{\Longrightarrow} f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv \text{cte}$

F

5d) Sea $f(z) = e^{z-1} - (3 - z^3)$ y $g(z) = -3$

Aplicamos Rouché en $\boxed{|z|=1}$

$$|f(z) - g(z)| = |e^{z-1} + z^3| \leq |e^{z-1}| + |z|^3$$
$$= e^{\mathrm{Re}(z)-1} + 1 \leq e^{1-1} + 1 = 2$$
$$< 3 = |g(z)|$$

$\Rightarrow \# Z_f(\mathbb{D}) = \# Z_g(\mathbb{D}) = 0.$ (V)

(**Nota** Tb puede verse sin Rouché, pues

$$|e^{z-1} + z^3| \leq 2 < 3 \quad \forall z \in \mathbb{D}.)$$

5e). Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$: $f(z) \neq \pm 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Por el Tma Picard, $f \equiv cte = c_0 \Rightarrow$ basta tomar $c_1 \in \mathrm{Arccos}(c_0)$

y $\boxed{h(z) \equiv c_1} \Rightarrow \cos h = f$.

(Otra prueba (sin usar Picard) sería:

busco h / $f = \cos h = \dfrac{e^{ih} + e^{-ih}}{2}$

$\Leftrightarrow 2f e^{ih} = e^{2ih} + 1 \Leftrightarrow e^{ih} = f \pm \sqrt{f^2 - 1}$

Como $f \neq \pm 1 \Rightarrow f^2 - 1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y <u>no nula</u>

$\overset{\mathbb{C} \sim SC}{\Longrightarrow} \exists g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : g^2 = f^2 - 1$ (ie $g \in \sqrt{f^2 - 1}$)

Como $f + g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y no nula $\Big\} \overset{\mathbb{C}-SC}{\Longrightarrow} \exists h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : f + g = e^{ih}$

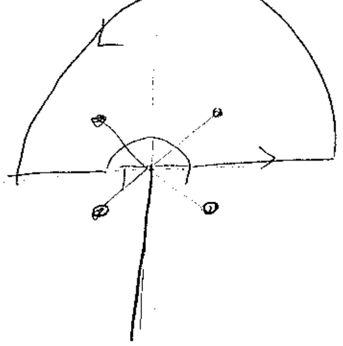
(si $f + g = 0 \Rightarrow f^2 = g^2 = f^2 - 1$
$\Rightarrow 0 = -1$ ↯)

$\Downarrow$

$f = \cos h$.)

(4) $\qquad\qquad$ p (3)

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^4}\,dt = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$



$$F(z) = \frac{\mathrm{Log}_{(-\pi/2,\,3\pi/2)} z}{1+z^4} \in \mathcal{H}\Big(\overbrace{(\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]i)}^{\Omega\ \boxed{SC}} \setminus \underbrace{\{\sqrt[4]{-1}\}}_{A}\Big)$$

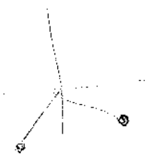
(polos simples)

donde $A=\sqrt[4]{-1} = \{e^{\pm i\frac{\pi}{4}},\ e^{\pm 3i\frac{\pi}{4}}\}$

Tomo $C_{R,\varepsilon} = [-R,-\varepsilon]\cup C_\varepsilon^- \cup [\varepsilon,R]\cup C_R^+ \Rightarrow C^*_{R,\varepsilon} \subseteq \Omega\setminus A$

$$\Rightarrow I_{R,\varepsilon} = \int_{C_{R,\varepsilon}} F(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(F,e^{i\frac{\pi}{4}}) + \mathrm{Res}(F, e^{\frac{3\pi i}{4}})\right)$$

$$a\in A \Rightarrow \mathrm{Res}(F,a) = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)\,\mathrm{Log}\, z}{1+z^4} = \frac{\mathrm{Log}\, a}{4a^3} = \begin{cases} \dfrac{i\pi/4}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} \\[2ex] \dfrac{i3\pi/4}{4e^{i9\pi/4}}\end{cases}$$



$$\Rightarrow I_{R,\varepsilon} = 2\pi i\,\frac{i\pi}{16}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + 3e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{8}\left(-\frac{\sqrt2}{2}(1+i) + 3\frac{\sqrt2}{2}(1-i)\right)$$

$$= -\frac{\pi^2\sqrt2}{16}(-1-i+3-3i)$$

$$= -\frac{\pi^2\sqrt2}{16}(2-4i)$$

Now $I_{R,\varepsilon} = \int_{[-R,-\varepsilon]} + \int_{C_\varepsilon^-} + \int_{[\varepsilon,R]} + \int_{C_R^+}$

$$= I^1_{R,\varepsilon} - I^2_{R,\varepsilon} + I^3_{\varepsilon,R} + I^4_{R,\varepsilon}$$

$$|I^4_{R,\varepsilon}| \le \int_{C_R^+} \frac{|\mathrm{Log}\, z|}{R^4-1}\,|dz| \le \int_0^\pi \frac{(\ln R + \pi)}{R^4-1}\, R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\left|I^2_{R,\varepsilon}\right| \le \int_{C_\varepsilon} \frac{|\mathrm{Log}\, z|}{1-\varepsilon^4}\,|dz| \le \int_0^\pi \frac{|\ln \varepsilon| + \pi}{1-\varepsilon^4}\cdot \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \,;$$

(pues $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon|\ln \varepsilon| = 0$)

$$I^1_{R,\varepsilon} = -\int_R^\varepsilon \frac{\mathrm{Log}(-t)}{1+(-t)^4}\,dt = \int_\varepsilon^R \frac{\ln t + i\pi}{1+t^4}\,dt \xrightarrow{TCD} \int_0^\infty \frac{\ln t + i\pi}{1+t^4}\,dt$$

$z = -t$

$$I^3_{R,\varepsilon} = \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{Log}(t)}{1+t^4}\,dt \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^4}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 2\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^4}\,dt + i\pi\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}(2-4i)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Re}} \quad \boxed{\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^4}\,dt = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = +\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$