Variable Compleja, 3º Matemáticas Test 1, 18/10/2023

SOLUCIONES 10

1.- Calcula las siguientes integrales. En todos los casos, debes justificar claramente el uso del teorema de Cauchy, dibujando las curvas, los puntos y las regiones de holomorfía que consideres.

a) Si $\gamma = \{|z+\frac{1}{2}| = 1\}$, demuestra que

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{1-z}}{(z+1)(z+i)}\, dz = \pi\sqrt{2}\,(1-i).$$

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cos(a\,\mathrm{sen}\,t)\, dt = 2\pi.$

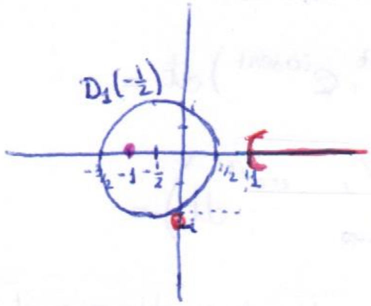
c) Si $S(z) = \displaystyle\int_{[-1,z]} \mathrm{Log}\,(1-w)\; dw$, calcula

$$\int_{|z+2|=2} \frac{e^{S(z)}}{(z+1)^3}\, dz.$$

Sugerencia: en b) escribe $\cos(a\,\mathrm{sen}\,t)$ como la parte real de $e^{ia\,\mathrm{sen}\,t}$.

SOLUCIONES

a)



$\sqrt{1-z}$ es holomorfa $\iff 1-z \notin (-\infty,0] \iff z-1 \notin [0,+\infty)$ Ojo

$\iff z \notin [1,+\infty)$

Luego $\sqrt{1-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus[1,+\infty))$

Tomo $f(z)=\dfrac{\sqrt{1-z}}{z+i} \in \mathcal{H}(\underbrace{\mathbb{C}\setminus\{[1,+\infty), -i\}}_{\Omega \text{ abierto}})$

$\Delta = \overline{D_1}(-1/2) \subseteq \Omega$ $\boxed{\text{Se puede ver en el dibujo que } -i\notin \overline{D_1}(-\tfrac{1}{2}): \ |-\tfrac{1}{2}-i| = \sqrt{\tfrac{1}{4}+1} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} > \sqrt{1} = 1}$

$-1 \in \mathring{\Delta}$ porque $|-\frac{1}{2}-(-1)| < 1$

Podemos aplicar Cauchy ahora que tenemos todas las hipótesis:

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{1-z}}{(z+1)(z+i)}\,dz = \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-(-1)}\,dz = 2\pi i\, f(-1) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{-1+i} = 2\pi i \frac{\cancel{\sqrt{2}}\,e^{i0}}{\cancel{\sqrt{2}}\,e^{i3\pi/4}} = 2\pi i\, e^{-i\frac{3\pi}{4}} =$$

$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$= 2\pi i\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi i(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = \pi\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}\,i = \pi\sqrt{2}(1-i)$$

c) Primero veamos que $S(z)$ es holomorfa:

$\mathrm{Log}(1-w)$ es holomorfa $\iff 1-w \notin (-\infty,0] \iff w-1 \notin [0,+\infty) \iff w \notin [1,+\infty)$

$\mathrm{Log}(1-w) \in \mathcal{H}(\underbrace{\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)}_{\Omega \text{ abierto estrellado}})$

con $z_0=-1$ por ejemplo

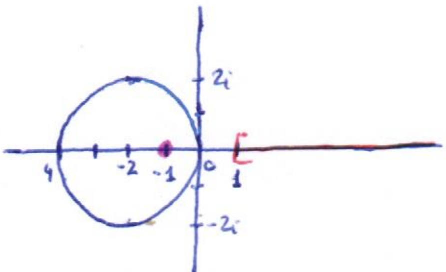
Como Ω es un ab. estrellado y $\mathrm{Log}(1-w)\in\mathcal{H}(\Omega)$, por el corolario de Cauchy-Goursat, tenemos que la primitiva definida por $\int_{[a,z]} \mathrm{Log}(1-w)\,dw = \int_{-1}^{z} \mathrm{Log}(1-w)\,dw \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Tomamos $f(z) = e^{S(z)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω abierto y estrellado.

La exponencial es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, luego $S(z)$ es la única restricción.

$\Delta = \overline{D}_2(-2) \subseteq \Omega$

$-1 \in \mathring{\Delta}$



Teniendo las hipótesis podemos aplicar la fórmula de Cauchy para derivadas.

$$\int_{|z+2|=2} \frac{e^{S(z)}}{(z+1)^3}\,dz = \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{(z+1)^3}\,dz = \cancel{2}\pi i \frac{f''(-1)}{\cancel{2!}} = \pi i\left(\frac{-1}{2}e^0 + \mathrm{Log}^2(2)\,e^0\right) = \pi i\left(-\frac{1}{2} + \ln^2 2\right)$$

$$\boxed{f'(z) = S'(z)\,e^{S(z)} \underset{\text{TFC}}{=} \mathrm{Log}(1-z)\,e^{S(z)} \qquad f''(z) = \frac{-1}{1-z}e^{S(z)} + \mathrm{Log}^2(1-z)\,e^{S(z)}}$$

b) Siguiendo la sugerencia tomaremos $\cos(a\,\text{sen}t) = \text{Re}(e^{ia\,\text{sen}t})$.

Además teniendo en cuenta que $e^{a\cos t} \in \mathbb{R}$ porque $a \in \mathbb{R}$, deducimos:

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cos(a\,\text{sen}t)\,dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{a\cos t}}_{\in \mathbb{R}} \text{Re}(e^{ia\,\text{sen}t})\,dt = \int_0^{2\pi} \text{Re}(e^{a\cos t}\cdot e^{ia\,\text{sen}t})\,dt =$$

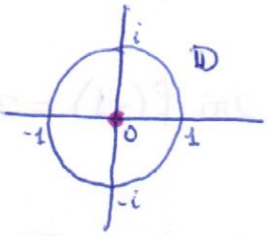
$$= \text{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cdot e^{ia\,\text{sen}t}\,dt\right) = \text{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{a(\cos t + i\,\text{sen}t)}\,dt\right) = \text{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{ae^{it}}\,dt\right) =$$

$$\text{C.V.}\begin{cases} z = e^{it} \\ dz = ie^{it}\,dt \Rightarrow dt = \dfrac{dz}{iz} \end{cases}$$

$$= \text{Re}\left(\int_{|z|=1} e^{az}\frac{1}{iz}\,dz\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{e^{az}}{(z-0)}\,dz\right) = I$$

Ahora veamos que se cumplen las hipótesis de la fórmula de Cauchy:

- $f(z) = e^{az} \in \mathcal{H}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{abierto}}}{\mathbb{C}})$
- $\Delta = \overline{\mathbb{D}} \subseteq \mathbb{C}$
- $0 \in \mathring{\Delta}$



Aplicando la fórmula tenemos:

$$I = \text{Re}\left(\frac{1}{\cancel{i}}2\pi\cancel{i}f(0)\right) = \text{Re}(2\pi\cdot 1) = 2\pi$$