Variable Compleja, 3º Matemáticas Test 2, 13/11/2023

Nombre:

....

10/

1. Considera la serie de potencias

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n+2}(z-1)^{3n}.$$

a) Determina su disco de convergencia

b) Determina la convergencia en la frontera, dibujando la región correspondiente

c) Calcula la suma explícita de $S(z)$ en términos de funciones elementales

2. **V/F:** justifica la respuesta

Si $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{2n^2})$ para todo $n = 7, 8, \ldots$, entonces f es par.

$\boxed{1}$ $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n+2} (z-1)^{3n}$

a) Determinar disco de convergencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n+2} (z-1)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8(z-1)^3)^n}{n+2} \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n+2} \longrightarrow \text{Aplicamos el } \underline{\text{criterio del cociente}}:$$

$$\omega = 8(z-1)^3$$

$a_n = \frac{1}{n+2} \Rightarrow L = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{n+2}{n+3} = 1 \Rightarrow R_\omega = 1/L = 1.$

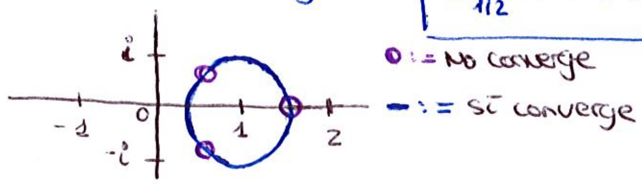
Como $\lim_n a_n = 0$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente ($\oplus$ ($a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$)), por el criterio de Dirichlet la serie convergerá en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. En $\omega = 1$ no será convergente, pues $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ tiene el mismo carácter que la serie armónica, la cual diverge.

En consecuencia, $|\omega| \leq 1 \Leftrightarrow |8(z-1)^3| \leq 1 \Leftrightarrow |(z-1)| \leq \overset{R_z}{\overset{\shortparallel}{1/2}}$, luego el disco de convergencia será $\boxed{D_{1/2}(1)}$

b) Determinar la convergencia en la frontera, dibujando la región correspondiente.

Apoyándonos en lo anterior, sabemos que converge en toda la frontera salvo cuando $\omega = 1$, i.e., $8(z-1)^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)^3 = 1/8$, luego $z - 1 \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Leftrightarrow z \in \{3/2, 1+\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1+\frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$

Entonces $S(z)$ converge en $\boxed{\overline{D}_{1/2}(1) \setminus \{3/2, 1+\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, 1+\frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}}$



c) Calcular suma explícita de $S(z)$ en términos de funciones elementales.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n+2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+2}}{n+2} \rightsquigarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+2}}{n+2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} = \omega \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \underset{\substack{\uparrow \\ |\omega|<1}}{=} \omega \frac{1}{1-\omega} \rightsquigarrow$$

$\rightsquigarrow$ Integramos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+2}}{n+2} = -\omega - Log(1-\omega) + C$. Como para $\omega = 0$ debe valer 0, $\boxed{C = 0}$,

$\left(\frac{\omega}{1-\omega} = -1 + \frac{1}{1-\omega}\right)$

luego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+2}}{n+2} = -\omega - Log(1-\omega)$. Deshaciendo el cambio $\omega = 8(z-1)^3$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n+2} (z-1)^{3n} = \frac{-1}{8(z-1)^3} - \frac{Log(1-8(z-1)^3)}{64(z-1)^6}}$$

2 V/F: Si $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $f(1/n) = g\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ $\forall n \geq 7$ $\Rightarrow f$ par

Definamos la siguiente función $h(z) = f(z) - g\left(\frac{z^2}{2}\right) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, pues es diferencia y composición de holomorfas.

Sabemos, por hipótesis, $\forall n \geq 7$ $h(1/n) = f(1/n) - g\left(\frac{1}{2n^2}\right) = 0$.

Más aún, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \Rightarrow h \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$, luego $\lim_n h(1/n) = h(\lim_n 1/n) = h(0) =$

$= \lim_n (f(1/n) - g(1/2n^2)) = 0 \Rightarrow \{1/n : n \geq 7, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq Z_h \Rightarrow 0 \in ac(Z_h) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h \equiv 0} \Rightarrow f(z) = g\left(\frac{z^2}{2}\right)$. Así, $f(z) = g\left(\frac{z^2}{2}\right) = g\left(\frac{(-z)^2}{2}\right) = f(-z)$ $\forall z \in \mathbb{D} \Rightarrow$

Principio de prolongación analítica

$\Rightarrow f$ par y por ende SÍ existe una función que verifique estas condiciones.

$\square$

✓