MATEMÁTICAS II **1º de grado en Químicas**

Resumen de la práctica 1: Ecuaciones diferenciales con Maxima

1. El paquete plotdf.

Para poder usarlo lo primero que hay que hacer es cargarlo:

```
-->    load("plotdf");
```

1.1. El comando: plotdf

La función/comando `plotdf` dibuja el *campo de direcciones*[1] de una ED de primer orden

$$y'(x) = F(x, y),$$

o el plano XY de un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

Ejemplo 1: para la ecuación $y'(x) = 0'2y(5 - y)$ se escribe

```
-->    plotdf(0.2*y*(5-y));
```

- Por defecto los ejes tienen tamaño $[-10, 10] \times [-10, 10]$.
- Para continuar con otros ejemplos, es necesario cerrar la ventana de plotdf.

Ejemplo 2: Si queremos usar otras variables (digamos $x'(t) = 0'2x(5 - x)$), incluir la condición inicial (digamos $x(0) = 1$), o cambiar el tamaño de los ejes, podemos usar

```
-->    plotdf(0.2*x*(5-x),[t,x], [trajectory_at,0,1],[t,0,20],[x,0,7]);
```

- Señalando con el ratón en distintos puntos podréis ver otras soluciones.
- Pulsando en el botón "actualizar" (`replot`) se limpia el contenido de la ventana, quedando sólo la última trayectoria dibujada[2].

Ejemplo 3: (ejercicio 22) Analizar las soluciones del sistema de ecuaciones de un modelo competitivo

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -2x + 2y \end{cases} \qquad \text{con } x(0) = 90, \quad y(0) = 150.$$

```
-->    plotdf([3*x+4*y,-2*x+2*y],[x,0,800],[y,0,200],[trajectory_at,90,150]);
```

- Como los valores iniciales son grandes, escogemos las regiones `[x,0,800]` e `[y,0,200]`.
- Con este comando se visualizan las soluciones en el plano XY; para ver las curvas $x(t), y(t)$ presionar "`plot versus` t".

[1] Ver por ejemplo `http://es.scribd.com/doc/50991588/35/Curvas-isoclinas`

[2] En el documento ecuacmaxima.pdf que hemos puesto en la web de la asignatura tenéis una descripción de todas las opciones posibles tanto del comando como de la propia ventana plotdf.

Ejemplo 4: uso de las opciones *direction, xfun, parameters* y *sliders* para $y'(x) = -ry(x)$.

El siguiente comando dibuja el campo de pendientes de la ED, incorporando un deslizador para modificar la tasa de desintegración r, y también incorporando la gráfica de una función fija $y(x) = 4e^{x-1}$.

```
--> plotdf(-r*y,[xfun,"4*exp(-r*(x-1))"],[direction,forward],
    [parameters,"r=0.1"],[sliders,"r=0.1:2"]);
```

Ejemplo 5 : uso de las opciones *parameters, sliders, tstep, nsteps* y *versus_t*. El sistema de EDs que modela un péndulo amortiguado es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (-g \sin x - by/m)/L \end{cases}.$$

Dibujamos la solución para $x(0) = 5'26$, $y(0) = 1'27$, con una barra de deslizamiento para la masa m. El comando `tstep` indica el paso h del método numérico y `nsteps` el número n de iteraciones; aquí $h = 0'01$ y $n = 300$, por tanto dibujará las soluciones para $0 \leq t \leq 3$.

```
-->   plotdf([y,(-g*sin(x) - b*y/m)/l], [x,-2,10],[y,-14,14],
      [parameters,"g=9.8,l=0.5,m=0.3,b=0.05"],[trajectory_at,5.26,1.27],[tstep,0.01],
      [direction,forward],[nsteps,300],[sliders,"m=0.1:1"], [versus_t,1]);
```

1.2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Resuelve el problema 14 relativo a la evolución de una población de peces modelada por la ecuación $x'(t) = 0'2x(5-x) + \sin(\pi t)$, donde $x(t)$ es el número de peces (en miles) tras t meses. Representa gráficamente la evolución de la población durante el primer año para la condición inicial $x(0) = 1$. Traza la evolución con distintas condiciones iniciales en $t = 0$ y observa la existencia de una solución estacionaria

```
-->
```

Ejercicio 2

Resuelve el problema 24 relativo al *modelo presa-depredador*

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

diciendo cuál es el depredador y cuál la presa, y representando el diagrama de fases con la trayectoria correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1000$, y en otra ventana observa la evolución de las curvas $x(t)$ e $y(t)$. ¿Cuándo desaparecen las poblaciones?

Ind: selecciona primero la región [x,0,2000] e [y,0,2000] para hacerte una idea y después cambia los intervalos para observar mejor la dinámica de las poblaciones; selecciona tambien la opción [direction,forward] para no ir hacia atrás en el tiempo

```
-->
```

Ejercicio 3

Resuelve el problema 25 relativo al *modelo presa-depredador de Volterra* (1926)

$$\begin{cases} x' = rx + 0'03xy \\ y' = sy - 0'25xy \end{cases}$$

con distintos valores de los parámetros r y s que se pueden ir modificando con una barra de desplazamiento. Los valores a los que se refiere el ejercicio son

(a) $r = -0'1$ $s = 0'2$ (b) $r = -0'02$ $s = 0'3$ (c) $r = -0'2$ $s = 0'05$

En todos los casos considera por ejemplo las poblaciones iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = 8$.

Responde a las cuestiones de los distintos apartados. Observa la evolución en cada caso con distintas condiciones inciales, visualizando las trayectorias periódicas y curvas/puntos estacionarios.

Indicación: considera la ventana inicial [x,0,8] [y,0,15] y varíala después si lo crees conveniente

```
-->
```

Soluciones

Ejercicio 1

```
(%i14) plotdf(0.2 * x* (5-x) + sin(%pi*t),[t,x]);[t,0,30],[x,-1,8]);
```

Ejercicio 2

```
(%i20) plotdf([x+y,-x+y],[x,0,5000],[y,-1000,3000],[trajectory_at,1000,1000],
       [direction,forward],[nsteps,3000]);
```

Ejercicio 3

```
(%i23) plotdf([r*x+0.03*x*y,s*y-0.25*x*y], [x,0,8],[y,0,15],
       [parameters,"r=-0.1,s=0.2"],[trajectory_at,2,8],[tstep,0.1],[direction,forward],
       [nsteps,3000],[sliders,"r=-0.1:-0.02"], [versus_t,1]);
```

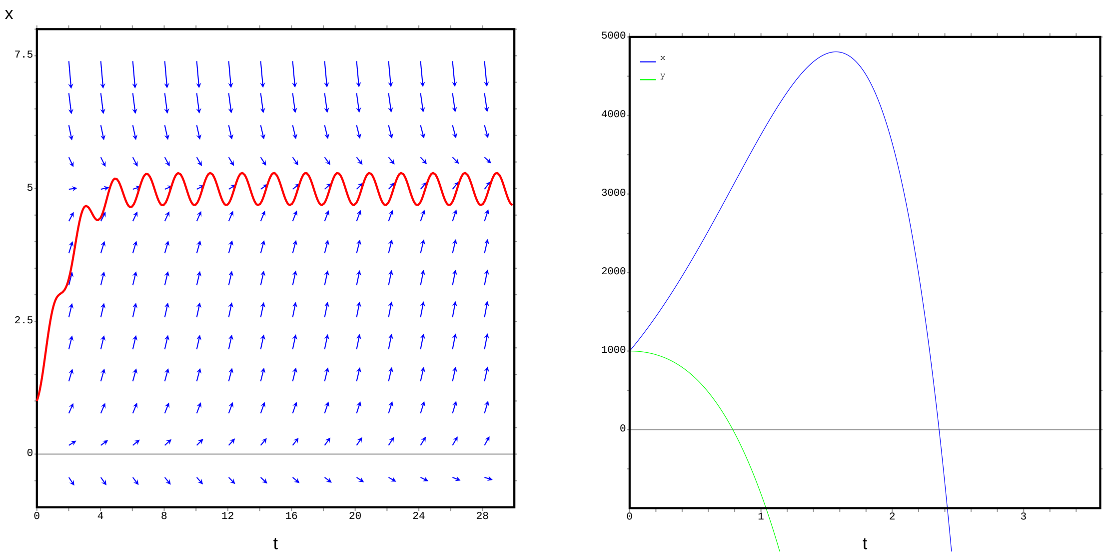

Figura 1: Ejercicio 1: ecuación logística con caza periódica; a largo plazo implica oscilaciones periódicas. Ejercicio 2: La presa y se extingue en 1 año y el depredador x en 2'5 años.

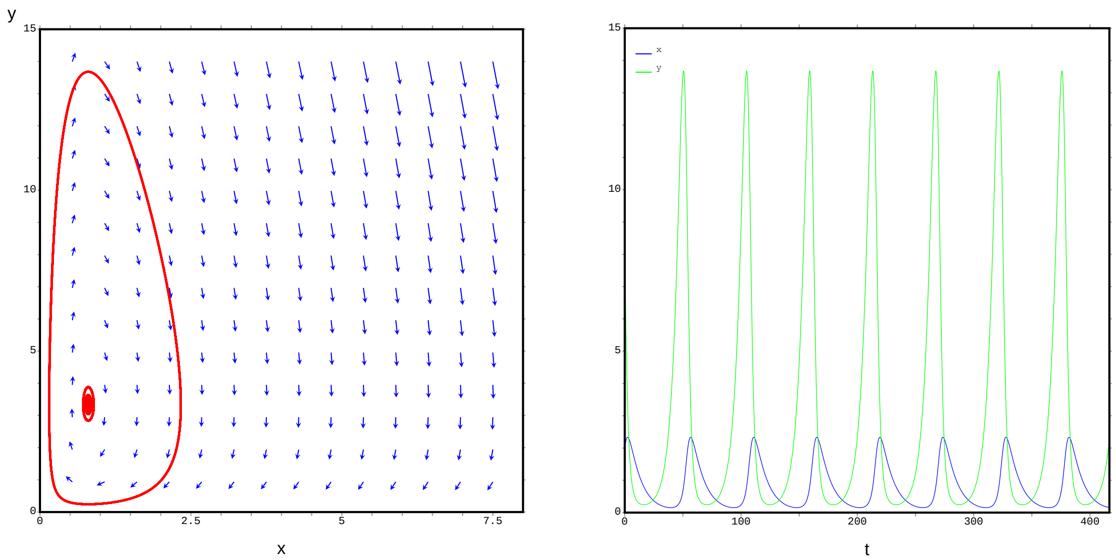

Figura 2: Ejercicio 3a: la presa oscila en $0 \leq y \leq 14$ y el depredador en $0 \leq x \leq 2'5$. En el equilibrio $x_{\text{eq}} = 0'8$, $y_{\text{eq}} = 3'3$.

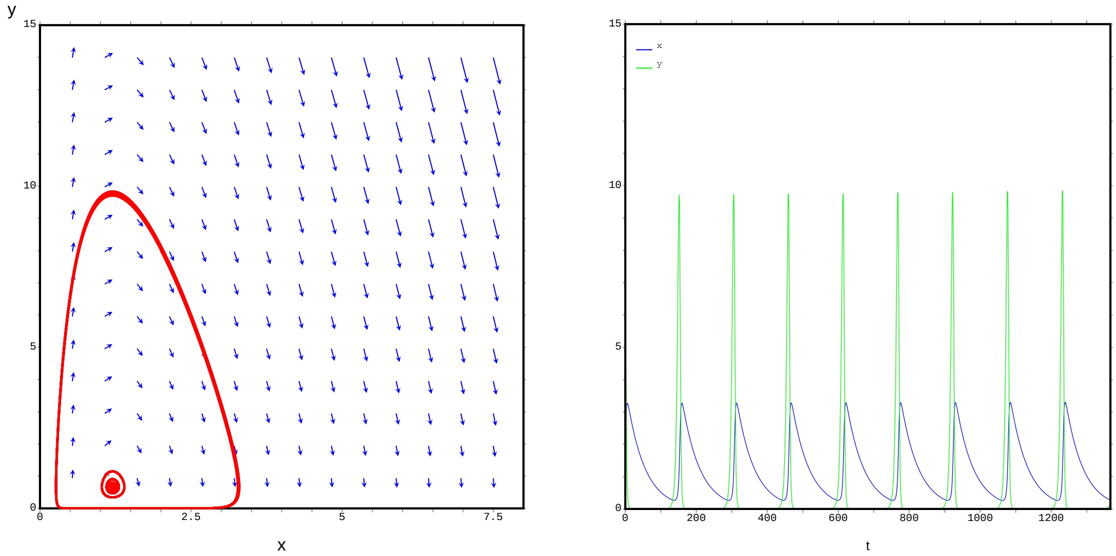

Figura 3: Ejercicio 3b: la presa oscila en $0 \leq y \leq 10$ y el depredador en $0 \leq x \leq 3$. En el equilibrio $x_{\text{eq}} = 1'2$, $y_{\text{eq}} = 0'6$. El parón pesquero tiene como consecuencia una reducción notable de sardinas, debido al pequeño aumento de depredadores.

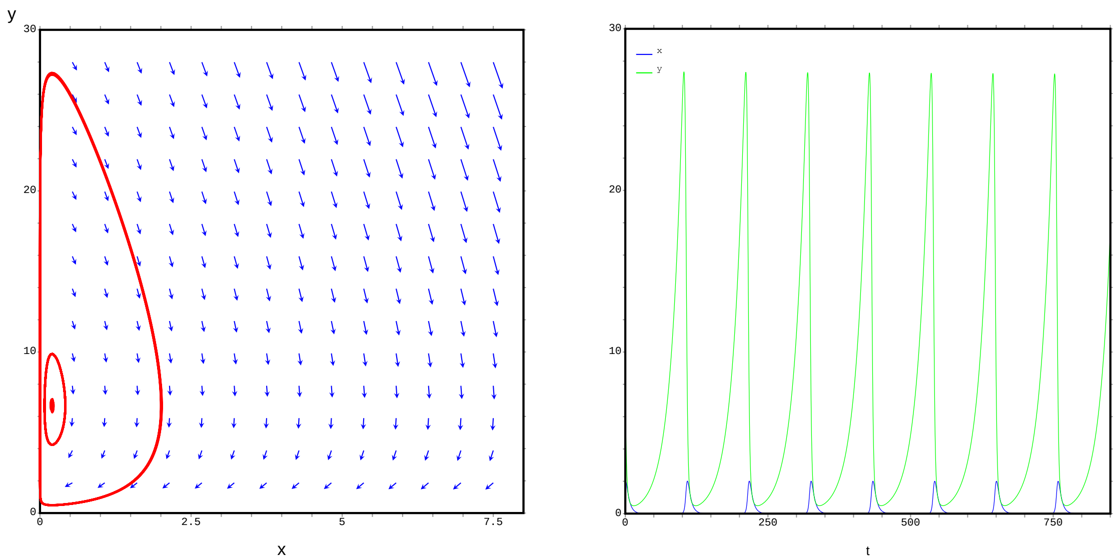

Figura 4: Ejercicio 3c: la presa oscila en $0 \leq y \leq 28$ y el depredador en $0 \leq x \leq 2$. En el equilibrio $x_{\text{eq}} = 0'2$, $y_{\text{eq}} = 6'7$. El pesticida tiene como consecuencia un aumento a corto plazo de la plaga, debido a la drástica disminución de los depredadores.