Análisis y geometría convexa: Isoperimetría y "salto espectral"

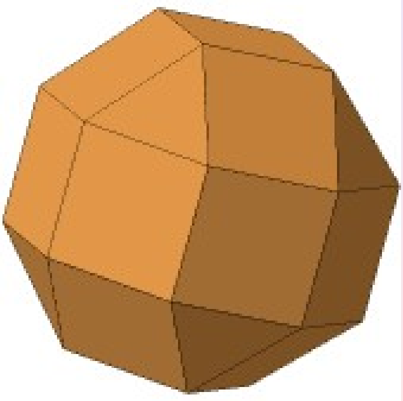
Jesús Bastero, Universidad de Zaragoza, IUMA

Departamento de Matemáticas. Seminario, 20-XI-2014

Un aperitivo

Un aperitivo

- $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo (convexo, compacto, $0 \in \operatorname{Int} K$)
- Si K es simétrico respecto 0 es la bola unidad de una norma en $\mathbb{R}^n$



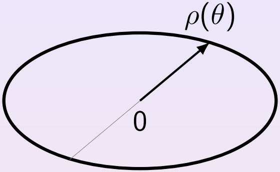
... y una cuenta para empezar

. . . y una cuenta para empezar

Caso $\mathbb{R}^2$, $|K| = 1$

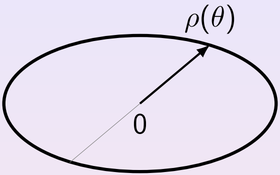
...y una cuenta para empezar

Caso $\mathbb{R}^2$, $|K| = 1$



. . . y una cuenta para empezar

Caso $\mathbb{R}^2$, $|K| = 1$

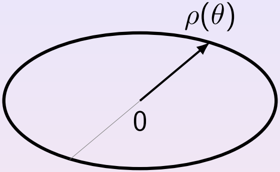


$$1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\theta)^2 d\theta \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |K \cap \mathbb{R}[\theta]|_1^2 d\theta$$

$$\Longrightarrow \max\{|K \cap H|; H \subset \mathbb{R}^2, \text{ hiperplano }\} \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

. . . y una cuenta para empezar

Caso $\mathbb{R}^2$, $|K| = 1$



$$1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\theta)^2 d\theta \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |K \cap \mathbb{R}[\theta]|_1^2 d\theta$$

$$\Longrightarrow \max\{|K \cap H|; H \subset \mathbb{R}^2, \text{ hiperplano }\} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Todo convexo en el plano de área 1, tiene alguna cuerda de longitud mayor que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Dimensión n: La Conjetura del hiperplano

Dimensión n: La Conjetura del hiperplano

Slicing problem, Bourgain (1986)

$K \subset \mathbb{R}^n$ cuerpo convexo con $|K| = 1$
¿Existe alguna sección por un hiperplano tal que

$$C \leq |K \cap H|_{n-1}$$

$C > 0$ absoluta, independiente de la dimensión?

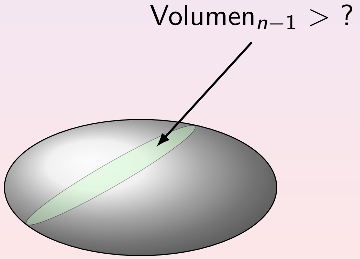
Dimensión n: La Conjetura del hiperplano

Slicing problem, Bourgain (1986)

$K \subset \mathbb{R}^n$ cuerpo convexo con $|K| = 1$
¿Existe alguna sección por un hiperplano tal que

$$C \leq |K \cap H|_{n-1}$$

$C > 0$ absoluta, independiente de la dimensión?



Resultados conocidos

- Con el elipsoide de John y K simétrico

$$\frac{C}{n^{\frac{1}{2}}} \leq |K \cap H|_{n-1}$$

- Bourgain 1986,

$$\frac{C}{n^{\frac{1}{4}} \log n} \leq |K \cap H|_{n-1}$$

- Klartag 2006,

$$\frac{C}{n^{\frac{1}{4}}} \leq |K \cap H|_{n-1}$$

- Geómetras con mucha ilusión esperan que

$$\frac{1}{e} \leq |K \cap H|_{n-1}$$

Cierto para

- cuerpos convexos inconditionales
- bolas unidad de las normas de Schatten, $1 \leq p \leq \infty$
- zonoides
- politopos con número de vértices proporcional a la dimension, $N/n \leq 2$
- y más ...

Isoperimetría

Isoperimetría

o

¿Cómo la superficie controla al volumen?

Desigualdad isoperimétrica en el plano

Desigualdad isoperimétrica en el plano

Entre todos los subconjuntos del plano que tienen el mismo perímetro, los círculos tienen área máxima

$$\Updownarrow$$

Desigualdad isoperimétrica en el plano

Entre todos los subconjuntos del plano que tienen el mismo perímetro, los círculos tienen área máxima

$$\Updownarrow$$

Entre todos los subconjuntos del plano con la misma área, los círculos tienen el mínimo perímetro

Desigualdad isoperimétrica en el plano

Entre todos los subconjuntos del plano que tienen el mismo perímetro, los círculos tienen área máxima

$$\Updownarrow$$

Entre todos los subconjuntos del plano con la misma área, los círculos tienen el mínimo perímetro

Sea S el área y L el perímetro. Entonces

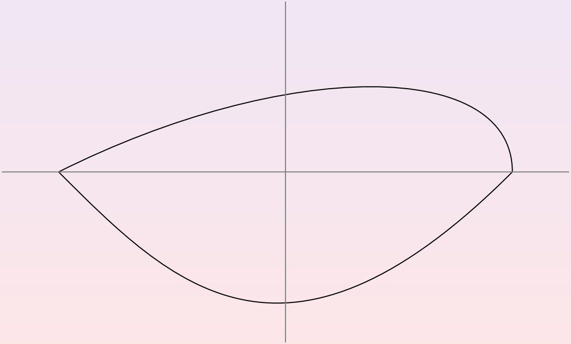
$$L^2 \geq 4\pi S$$

Teorema (según Hurwitz y Lebesgue)

Sea A un boreliano en $\mathbb{R}^2$, cuya frontera se pueda parametrizar $C^{(1}$ por el parámetro arco. Sea L la longitud del mismo y $S = |A|$ (área encerrada), entonces

$$L^2 \geq 4\pi S$$

Demostración:



Sea $x = x(s), y = y(s)$, con $s \in [0, L]$, podemos suponer (después de una traslación) que

$$\int_0^L x(s)ds = \int_0^L y(s) = 0$$

Según la fórmula de Riemann-Green

$$S = \int \int_A dxdy = \frac{1}{2} \int_\gamma -ydx + xdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (-y(s)x'(s) + x(s)y'(s))ds$$

$$(C - Sch) \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^L x^2 + y^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^L x'^2 + y'^2 \right)^{1/2}$$

Entonces

$$S \leq \frac{1}{2} L^{1/2} \left(\int_0^L x^2 + y^2 \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{2S}{\sqrt{L}} \right)^2 \leq \int_0^L x^2 + y^2$$

Entonces

$$S \leq \frac{1}{2} L^{1/2} \left(\int_0^L x^2 + y^2 \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{2S}{\sqrt{L}} \right)^2 \leq \int_0^L x^2 + y^2$$

$$\leq \text{ (desigualdad de Wirtinger)}$$

$$\leq \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int_0^L x'^2 + y'^2 = \frac{L^3}{4\pi^2}$$

lo que implica

$$L^2 \geq 4\pi S$$

Desigualdad de Wirtinger

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C^{(1}$, $f(0) = f(2\pi)$ y $\int_0^{2\pi} f = 0$, entonces

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Desigualdad de Wirtinger

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C^{(1}$, $f(0) = f(2\pi)$ y $\int_0^{2\pi} f = 0$, entonces

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Demostración:
$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt}$, $\hat{f}(0) = 0$ y $f' = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} ik\hat{f}(k)e^{ikt}$. Parseval implica

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} |\hat{f}(k)|^2$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} k^2|\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Desigualdad de Wirtinger

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C^{(1}$, $f(0) = f(2\pi)$ y $\int_0^{2\pi} f = 0$, entonces

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Demostración:
$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt}$, $\hat{f}(0) = 0$ y $f' = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} ik\hat{f}(k)e^{ikt}$. Parseval implica

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} |\hat{f}(k)|^2$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} k^2|\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Nota. Si $f : [0, L] \to \mathbb{C}$ con las mismas hipótesis, entonces

$$\int_0^{L} |f|^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} |f'|^2$$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Para un volumen dado,

los conjuntos con menor superficie son las bolas euclídeas.

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Para un volumen dado,

los conjuntos con menor superficie son las bolas euclídeas.

$$\frac{|\partial V|^{\frac{1}{n-1}}}{|V|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{|\partial B_1|^{\frac{1}{n-1}}}{|B_1|^{\frac{1}{n}}}$$

B_1 bola euclídea con $|B_1| = |V|$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Para un volumen dado,

los conjuntos con menor superficie son las bolas euclídeas.

$$\frac{|\partial V|^{\frac{1}{n-1}}}{|V|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{|S|^{\frac{1}{n-1}}}{|B|^{\frac{1}{n}}}$$

B, bola euclídea de radio 1
$S = \partial B$, su frontera

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Para un volumen dado,

los conjuntos con menor superficie son las bolas euclídeas.

$$\frac{|\partial V|^{\frac{1}{n-1}}}{|V|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{|S|^{\frac{1}{n-1}}}{|B|^{\frac{1}{n}}}$$

B, bola euclídea de radio 1
$S = \partial B$, su frontera

$$|\partial V| \geq n\,\omega_n^{1/n} |V|^{\frac{n-1}{n}}$$

siendo $\omega_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ = el volumen de la bola euclídea de radio 1.

Desigualdad de Brunn-Minkowski

Sean A y B dos borelianos en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}$$

$$\Updownarrow$$

$$|(1-\lambda)A + \lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda} \qquad \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$$

donde $A + B = suma\ \ de\ \ Minkowski = \{x + y; x \in A, y \in B\}$

Demostración de la desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

$$|\partial V| \geq n\,\omega_n^{\frac{1}{n}}|V|^{\frac{1}{n}}$$

donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano acotado

Demostración de la desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

$$|\partial V| \geq n\,\omega_n^{\frac{1}{n}} |V|^{\frac{1}{n}}$$

donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano acotado

$$|\partial V| = \liminf_{t \to 0} \frac{|V^t| - |V|}{t}$$

$$V^t = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, V) \leq t\} = V + tB$$

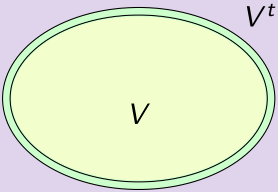
Demostración de la desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

$$|\partial V| \geq n\,\omega_n^{\frac{1}{n}} |V|^{\frac{1}{n}}$$

donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano acotado

$$|\partial V| = \liminf_{t\to 0} \frac{|V^t| - |V|}{t}$$

$$V^t = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, V) \leq t\} = V + tB$$



Demostración.

$$
\begin{aligned}
|V^t| - |V| = |V + tB| - |V| \\
&\geq \left(|V|^{\frac{1}{n}} + t\omega_n^{\frac{1}{n}} \right)^n - |V| \\
&= nt|V|^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}} + o(t)
\end{aligned}
$$

De aquí

$$
\begin{aligned}
|\partial V| &= \liminf_{t \to 0} \frac{|V^t| - |V|}{t} \\
&\geq n|V|^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Aproximación funcional: La desigualdad isoperimétrica via las desigualdades de Sobolev

Aproximación funcional: La desigualdad isoperimétrica via las desigualdades de Sobolev

Las desigualdades de Sobolev, relacionan las normas p de las funciones en $\mathbb{R}^n$ con las de sus gradientes.

Si f es C^1 y soporte compacto $1 \leq p < n$ y tenemos $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$

$$\|f\|_q \leq C_{n,p} \| |\nabla f| \|_p.$$

Si $p = 1$, $q = n/(n-1)$

$$\|f\|_{n/n-1} \leq C_n \|\nabla f\|_1$$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Maz'ja, Federer & Fleming ($\sim$ 1960)

Son equivalentes con la misma constante $C > 0$:

- Para cada boreliano acotado $A \subset \mathbb{R}^n$

$$|\partial A| \geq C\,|A|^{1-\frac{1}{n}}$$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Maz'ja, Federer & Fleming ($\sim$ 1960)

Son equivalentes con la misma constante $C > 0$:

- Para cada boreliano acotado $A \subset \mathbb{R}^n$

$$|\partial A| \geq C\,|A|^{1-\frac{1}{n}}$$

- Para cada función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1 de soporte compacto

$$\|\,|\nabla f|\,\|_1 \geq C\|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^n$

Maz'ja, Federer & Fleming ($\sim$ 1960)

Son equivalentes con la misma constante $C > 0$:

- Para cada boreliano acotado $A \subset \mathbb{R}^n$

$$|\partial A| \geq C\,|A|^{1-\frac{1}{n}}$$

- Para cada función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1 de soporte compacto

$$\|\,|\nabla f|\,\|_1 \geq C\|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

- Para cada función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, localmente Lipschitz, de soporte compacto

$$\|\,|\nabla f|\,\|_1 \geq C\|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

¿Qué sucede con otras medidas?

¿Qué sucede con otras medidas?

Estamos interesados, por ejemplo, en

- Medida soportada en un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$

¿Qué sucede con otras medidas?

Estamos interesados, por ejemplo, en

- Medida soportada en un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$
- Medida Gaussiana

$$\mu(A) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx, \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

- Medida exponencial,

$$\mu(A) = \frac{1}{2^n} \int_A e^{-|x|} dx, \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

Más en general,

Medidas (o probabilidades) log-cóncavas

$$\mu(A) = \int_A e^{-V(x)} dx, \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

donde $V : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ es convexa

Más en general,

Medidas (o probabilidades) log-cóncavas

$$\mu(A) = \int_A e^{-V(x)}dx, \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

donde $V : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ es convexa

Toda probabilidad log-concava μ en $\mathbb{R}^n$ verifica una desigualdad de tipo Brunn-Minkowski

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}$$

para cualquier $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano y cualquier $0 \leq \lambda \leq 1$.

Desigualdad isoperimétrica para probabilidades log-cóncavas

Desigualdad isoperimétrica para probabilidades log-cóncavas

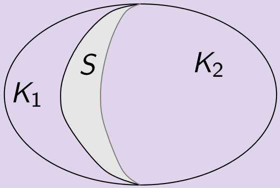
Kannan, Lovász and Simonovits (1995):

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ (cuerpo convexo) ¿cómo determinar una superficie S que divida K en dos partes y cuya medida sea mínima con relación al volumen de las dos partes?

Desigualdad isoperimétrica para probabilidades log-cóncavas

Kannan, Lovász and Simonovits (1995):

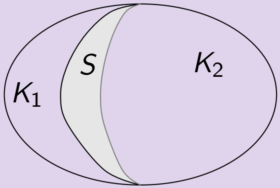
Si $K \subset \mathbb{R}^n$ (cuerpo convexo) ¿cómo determinar una superficie S que divida K en dos partes y cuya medida sea mínima con relación al volumen de las dos partes?



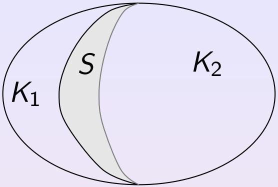
Desigualdad isoperimétrica para probabilidades log-cóncavas

Kannan, Lovász and Simonovits (1995):

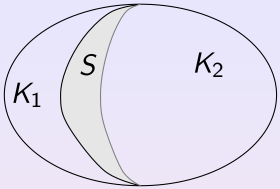
Si $K \subset \mathbb{R}^n$ (cuerpo convexo) ¿cómo determinar una superficie S que divida K en dos partes y cuya medida sea mínima con relación al volumen de las dos partes?



$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial_K S) \geq C \frac{\mathrm{vol}(K_1) \cdot \mathrm{vol}(K_2)}{\mathrm{vol}(K)}$$



$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial_K S) \geq C \frac{\mathrm{vol}(K_1)\cdot \mathrm{vol}(K_2)}{\mathrm{vol}(K)}$$



$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial_K S) \geq C \frac{\mathrm{vol}(K_1) \cdot \mathrm{vol}(K_2)}{\mathrm{vol}(K)}$$

Si normalizamos: $\mu(A) = \dfrac{|A|}{|K|}$

$$\mu^+(A) \quad \geq \quad C \;\; \mu(A)\mu(A^c)$$

Desigualdad isoperimetrica tipo Cheeger
(in geometría Riemanniana)

Problema isoperimetrico tipo Cheeger, para probabilidades log-cóncavas

Dada μ estimar la mejor $C > 0$ para la cual

$$\mu^+(A) \geq C\mu(A)\mu(A^c) \qquad \forall\, A \text{ borelian } \subseteq \mathbb{R}^n$$

equivalentemente

Problema isoperimetrico tipo Cheeger, para probabilidades log-cóncavas

Dada μ estimar la mejor $C > 0$ para la cual

$$\mu^+(A) \geq C\mu(A)\mu(A^c) \qquad \forall\, A \text{ borelian } \subseteq \mathbb{R}^n$$

equivalentemente

$$\mu^+(A) \geq C' \min\{\mu(A), \mu(A^c)\} \qquad \forall\, A \text{ boreliano } \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$C \geq C' \geq \frac{C}{2}$$

Problema isoperimetrico tipo Cheeger, para probabilidades log-cóncavas

Dada μ estimar la mejor $C > 0$ para la cual

$$\mu^+(A) \geq C\mu(A)\mu(A^c) \qquad \forall\, A \text{ borelian } \subseteq \mathbb{R}^n$$

equivalentemente

$$\mu^+(A) \geq C' \min\{\mu(A), \mu(A^c)\} \qquad \forall\, A \text{ boreliano } \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$C \geq C' \geq \frac{C}{2}$$

donde

$$\mu^+(A) := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(A^\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}$$

y

$$A^\varepsilon = \{a + x; a \in A, |x| < \varepsilon\}$$

Origen del problema

¡Teoría de la complejidad en ciencias de la computación!

- Un algoritmo para computar el volumen de un $K \subset \mathbb{R}^n$, es un algoritmo que recibe como entrada K (en la forma de un oráculo) y un parámetro de error ε y devuelve como salida $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$1 - \varepsilon \leq \frac{A}{|K|} \leq 1 + \varepsilon$$

- Se sabe (Bárány, Füredy, Elekes, 1986) que los algoritmos deterministas para calcular $|K|$ tienen complejidad exponencial.
- Dyer, Frieze, and Kannan (1989) construyeron un algoritmo de muestreo (*sampling algorithm*) que da la respuesta al problema con probabilidad $= 1 - \delta$ y complejidad polinomial en n, $\log(1/\delta)$, ε el error cometido, (La complejidad de un algoritmo se mide por el número de veces que se llama al oráculo y el número de operaciones aritméticas).

- Un algoritmo aleatorio para K es un algoritmo que recibe como entrada un cuerpo convexo n-dimensional (en la forma de oráculo), un punto $x_0 \in K$ y un error ε and devuelve un punto aleatorio cuya distribución dista en norma de variación total de la uniform distribution uniforme de K menos que ϵ.
- La forma de construir un algoritmo de muestreo, es tomando un camino aleatorio (*random walk*). En un momento los autores necesitan que la medida uniforme sobre el cuerpo convexo verifique una desigualdad isoperimétrica de tipo Cheeger. Con ello DFK obtuvieron una complejidad computacional $O(D^2 n^2)$, siendo D el diámetro.
- Con las mejores estimaciones conocidas hoy en día la complejidad del algoritmo de muestreo es de orden $O(n^c)$, con $2 < c < 3$.
- Si la conjetura KLS fuera cierta se obtendría una complejidad $O(n^2)$ para ese algoritmo.

Cheeger versus desigualdades tipo Poincaré

Teorema. (Maz'ja, Cheeger)

Sea μ una probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^n$.Son equivalentes:

i) $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$, boreliano

$$\mu^+(A) \geq C_1 \min\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

Cheeger versus desigualdades tipo Poincaré

Teorema. (Maz'ja, Cheeger)

Sea μ una probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^n$.Son equivalentes:

i) $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$, boreliano

$$\mu^+(A) \geq C_1 \min\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

ii) Para toda función integrable, localmente Lipschitz f

$$C_2 \|f - \mathbb{E}_\mu f\|_1 \leq \|\, |\nabla f|\, \|_1.$$

Cheeger versus desigualdades tipo Poincaré

Teorema. (Maz'ja, Cheeger)

Sea μ una probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^n$.Son equivalentes:

i) $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$, boreliano

$$\mu^+(A) \geq C_1 \, \text{mín}\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

ii) Para toda función integrable, localmente Lipschitz f

$$C_2 \|f - \mathbb{E}_\mu f\|_1 \leq \|\,|\nabla f|\,\|_1.$$

Además $C_2 \leq C_1 \leq 2C_2$.

Notación:

$$\mathbb{E}_\mu f = \int f \, d\mu \qquad \text{y} \qquad \|g\|_1 = \mathbb{E}_\mu |g| = \int |g| d\mu$$

Teorema de Emanuel Milman, 2010

Sea μ una probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

i) $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$, boreliano

$$\mu^+(A) \geq C_1 \min\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

ii) Para toda función integrable, localmente Lipschitz f

$$\lambda_2 \mathbb{E}_\mu \left| f - \mathbb{E}_\mu f \right|^2 \leq \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2.$$

λ_2 es el salto espectral del operador de Laplace Beltrami asociado a μ

$$L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$$

Teorema de Emanuel Milman, 2010

Sea μ una probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

i) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$, boreliano

$$\mu^+(A) \geq C_1 \min\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

ii) Para toda función integrable, localmente Lipschitz f

$$\lambda_2 \mathbb{E}_\mu \left|f - \mathbb{E}_\mu f\right|^2 \leq \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2.$$

λ_2 es el salto espectral del operador de Laplace Beltrami asociado a μ

$$L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$$

iii) Para toda función integrable f, con constante Lipschitz 1

$$C_3 \mathbb{E}_\mu \left|f - \mathbb{E}_\mu f\right|^2 \leq 1$$

$$\lambda_2 \leq C_3 \leq C\lambda_2$$

Problema de Kannan-Lovász-Simonovits

Dada μ log-cóncava en $\mathbb{R}^n$, estimar la mayor constante $C > 0$

$$\mu^+(A) \geq C\mu(A) \qquad \forall \text{ boreliano, } \mu(A) \leq \frac{1}{2}$$

Problema de Kannan-Lovász-Simonovits

Dada μ log-cóncava en $\mathbb{R}^n$, estimar la mayor constante $C > 0$

$$\mu^+(A) \geq C\mu(A) \qquad \forall \text{ boreliano, } \mu(A) \leq \frac{1}{2}$$

Sabemos que es equivalente a

Estimar el salto espectral

$$C'\mathbb{E}_\mu|f - \mathbb{E}_\mu f|^2 \leq 1 \qquad \forall \text{ 1-Lipschitz } f$$

$$C^2 \simeq \lambda_2 \simeq C'^2$$

Conjetura KLS

- El salto espectral se alcanza en las funciones afines, salvo una constante absoluta.

Conjetura KLS

- El salto espectral se alcanza en las funciones afines, salvo una constante absoluta.
- si μ es log-cóncava en $\mathbb{R}^n$ con baricentro $\mathbb{E}_\mu x$. Sea

$$\lambda_\mu^2 = \sup_{\theta \in S^{n-1}} \mathbb{E}_\mu \langle x - \mathbb{E}_\mu x, \theta \rangle^2$$

entonces, la desigualdad de Poincaré debería ser

$$\mathbb{E}_\mu |f - \mathbb{E}_\mu f|^2 \leq C \lambda_\mu^2 E_\mu |\nabla f|^2$$

Conjetura KLS

- El salto espectral se alcanza en las funciones afines, salvo una constante absoluta.
- si μ es log-cóncava en $\mathbb{R}^n$ con baricentro $\mathbb{E}_\mu x$. Sea

$$\lambda_\mu^2 = \sup_{\theta \in S^{n-1}} \mathbb{E}_\mu \langle x - \mathbb{E}_\mu x, \theta \rangle^2$$

  entonces, la desigualdad de Poincaré debería ser

$$\mathbb{E}_\mu |f - \mathbb{E}_\mu f|^2 \leq C \lambda_\mu^2 E_\mu |\nabla f|^2$$

- es decir, el salto espectral

$$\lambda_2 \sim \frac{1}{\lambda_\mu^2}$$

Resultados conocidos

KLS

Resultados conocidos

KLS

$$\mathbb{E}_\mu|f-\mathbb{E}_\mu f|^2 \leq C\mathbb{E}_\mu|x-\mathbb{E}_\mu x|^2\cdot\mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \sim C\,n\,\lambda_\mu^2\cdot\mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

$C>0$ constante absoluta

Resultados conocidos

KLS

$$\mathbb{E}_\mu|f-\mathbb{E}_\mu f|^2 \le C\mathbb{E}_\mu|x-\mathbb{E}_\mu x|^2 \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \sim C\, n\, \lambda_\mu^2 \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

$C>0$ constante absoluta

Payne-Weinberger (1960)

Si μ is la medida normalizada en K

$$\mathbb{E}_\mu|f-\mathbb{E}_\mu f|^2 \le \frac{4}{\pi^2}\,\mathrm{diam}(K)^2 \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

Resultados conocidos

KLS

$$\mathbb{E}_\mu|f-\mathbb{E}_\mu f|^2 \leq C\mathbb{E}_\mu|x-\mathbb{E}_\mu x|^2 \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \sim C\, n\, \lambda_\mu^2 \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

$C>0$ constante absoluta

Payne-Weinberger (1960)

Si μ is la medida normalizada en K

$$\mathbb{E}_\mu|f-\mathbb{E}_\mu f|^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\operatorname{diam}(K)^2 \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

Si B es la bola euclídea y μ su medida normalizada

$$\mathbb{E}_\mu|f-\mathbb{E}_\mu f|^2 \leq \frac{C}{n} \cdot \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2$$

(estimación justa)

Probabilidad exponencial, Talagrand (1991)

Sea $d\mu(x) = \frac{1}{2^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i|} dx$. Then

$$\mathbb{E}_\mu |f - \mathbb{E}_\mu f|^2 \leq C \cdot \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2$$

Caso gaussiano

Let $d\mu(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$. Then

$$\mathrm{Var}_\mu f = \mathbb{E}_\mu |f - \mathbb{E}_\mu f|^2 \leq \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2$$

La medida normalizada en

- Bolas p, $1 \leq p \leq \infty$ (Sodin 2008 , Łatala&Wojtasczick 2008)
- El simplex (Barthe and Wolff, 2009)
- Algunos cuerpos de revolución (Bobkov, 2003, Hue)
- Incondicionales (Klartag, 2009) con $\log n$ extra, i.e.

$$\mathrm{Var}_\mu f = \mathbb{E}_\mu \left| f - \mathbb{E}_\mu f \right|^2 \leq C \log n \, \lambda_\mu^2 \, \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2$$

Mejores estimaciones hasta hoy

Guedon-Milman (2011) + Eldan (2013)

La conjetura KLS es cierta con un factor extra

$$\mathrm{Var}_\mu f = \mathbb{E}_\mu \big| f - \mathbb{E}_\mu f \big|^2 \leq C n^{2/3} (\log n)^2 \, \lambda_\mu^2 \, \mathbb{E}_\mu |\nabla f|^2$$

para toda función Lipschitz integrable f.

Tres conjeturas geométricas

- Conjetura del hiperplano ($\sim$ 1986, Bourgain)
- Conjetura de la *thin shell* (2003, Bobkov-Koldobsky, Antilla-Ball-Perissinaki)
- Conjetura KLS (1995)

Tres conjeturas geométricas

- Conjetura del hiperplano ($\sim$ 1986, Bourgain)

$\Uparrow$ (Eldan-Klartag 2010)

- Conjetura de la *thin shell* (2003, Bobkov-Koldobsky, Antilla-Ball-Perissinaki)

- Conjetura KLS (1995)

Tres conjeturas geométricas

- Conjetura del hiperplano ($\sim$ 1986, Bourgain)

$\Uparrow$ (Eldan-Klartag 2010)

- Conjetura de la *thin shell* (2003, Bobkov-Koldobsky, Antilla-Ball-Perissinaki)

$\Uparrow$ $\Downarrow (\log n)^2$ (Eldan 2013)

- Conjetura KLS (1995)

Tres conjeturas geométricas

- Conjetura del hiperplano ($\sim$ 1986, Bourgain)

$\Uparrow$ (Eldan-Klartag 2010)

- Conjetura de la *thin shell* (2003, Bobkov-Koldobsky, Antilla-Ball-Perissinaki)

$\Uparrow$ $\Downarrow (\log n)^2$ (Eldan 2013)

- Conjetura KLS (1995)

$\Downarrow$ (Ball-Nguyen 2013)

- Conjetura del hiperplano

Gracias