Una introducción elemental al concepto de curvatura

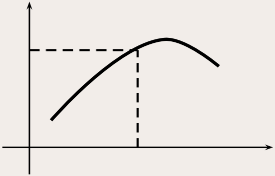
MARCOS DAJCZER
IMPA – Rio de Janeiro – Brasil

MURCIA

2015

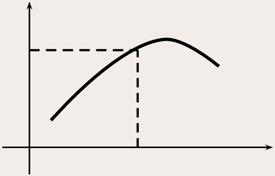
Curvas planas

Curva: Subconjunto "unidimensional" del plano



Curvas planas

Curva: Subconjunto “unidimensional” del plano



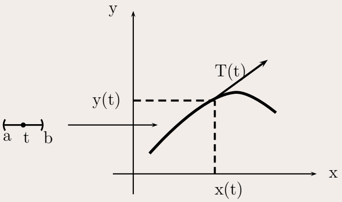
Ejemplos notables: Recta y circunferencia

Una circunferencia es el subconjunto de puntos del plano $\mathbb{R}^2$ que equidistan de un punto llamado centro.

Curvas parametrizadas

Velocidad

- Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$ por el parámetro tiempo.

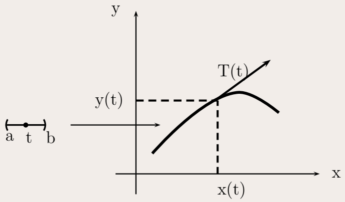


$$t \in (a,b) \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Curvas parametrizadas

Velocidad

- Una curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$ por el parámetro tiempo.



$$t \in (a,b) \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

- El vector velocidad = vector tangente es

$$T(t) = (x'(t), y'(t))$$

Curvas parametrizadas

Aceleración

1. Por simplicidad asumimos que la velocidad es constante

$$\|T(t)\| = 1,$$

o sea,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1.$$

Curvas parametrizadas

Aceleración

1. Por simplicidad asumimos que la velocidad es constante
$$\|T(t)\| = 1,$$
o sea,
$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1.$$
2. Obtenemos derivando que: $x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0$, o sea,
$$\langle T(t), (x''(t), y''(t))\rangle = 0$$

Curvas parametrizadas

Aceleración

1. Por simplicidad asumimos que la velocidad es constante

$$\|T(t)\| = 1,$$

o sea,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1.$$

2. Obtenemos derivando que: $x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0$, o sea,

$$\langle T(t), (x''(t), y''(t)) \rangle = 0$$

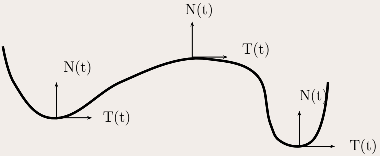
3. El vector aceleración es

$$A(t) = T'(t) = (x''(t), y''(t)).$$

La curvatura

La curvatura de una curva parametrizada

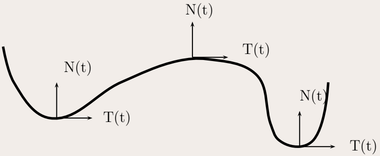
1. Sea $\{T(t), N(t)\}$ un referencial ortonormal a lo largo de una curva parametrizada $c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$.



La curvatura

La curvatura de una curva parametrizada

1. Sea $\{T(t), N(t)\}$ un referencial ortonormal a lo largo de una curva parametrizada $c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$.



2. La curvatura $k(t)$ de la curva parametrizada c en el punto $c(t)$ es

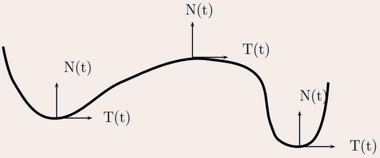
$$k(t) = \langle A(t), N(t)\rangle = \langle (x''(t), y''(t)), N(t)\rangle.$$

Por lo tanto, el signo de $k(t)$ depende de la elección de $N(t)$

La curvatura

La curvatura de una curva parametrizada

1. Sea $\{T(t), N(t)\}$ un referencial ortonormal a lo largo de una curva parametrizada $c\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$.



2. La curvatura $k(t)$ de la curva parametrizada c en el punto $c(t)$ es

$$k(t) = \langle A(t), N(t)\rangle = \langle (x''(t), y''(t)), N(t)\rangle.$$

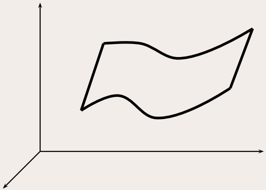
   Por lo tanto, el signo de $k(t)$ depende de la elección de $N(t)$

3. El valor de la aceleración es

$$|k(t)| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2}.$$

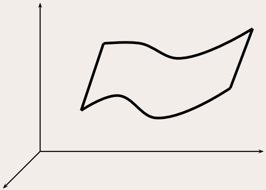
Superficies

Superficie: Subconjunto “bidimensional” del espacio



Superficies

Superficie: Subconjunto "bidimensional" del espacio

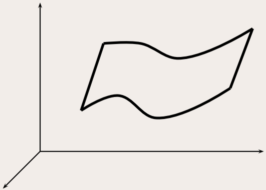


Ejemplos notables: Plano y esfera

Una esfera es el subconjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que equidistan de un punto llamado centro.

Superficies

Superficie: Subconjunto "bidimensional" del espacio



Ejemplos notables: Plano y esfera

Una esfera es el subconjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que equidistan de un punto llamado centro.

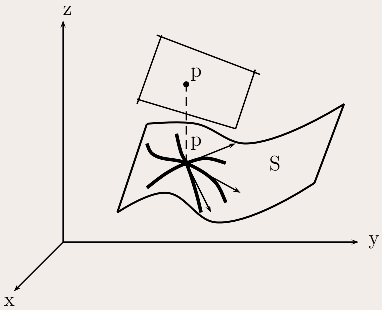
Superficies: versión clásica

Una superficie en las proximidades de un punto está formada por una multitud de curvas que pasan por ese punto.

Plano tangente

Plano tangente en $p \in S$: versión clásica

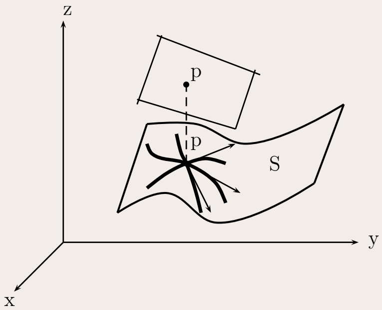
El plano tangente en un punto $p \in S$ de una superficie S es el formado por todos los vectores velocidad (vectores tangentes) de todas las curvas parametrizadas en S que pasan por el punto p.



Plano tangente

Plano tangente en $p \in S$: versión clásica

El plano tangente en un punto $p \in S$ de una superficie S es el formado por todos los vectores velocidad (vectores tangentes) de todas las curvas parametrizadas en S que pasan por el punto p.

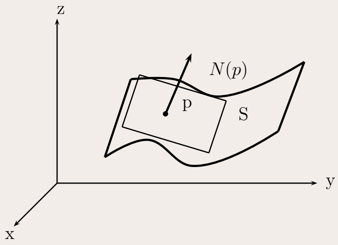


Pregunta: ¿Y es realmente un plano?

Vector normal

Vector normal a S en p

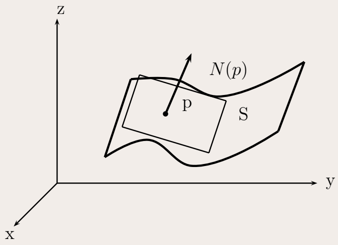
El vector normal $N(p)$ es un vector perpendicular unitario ($\|N(p)\| = 1$) al plano tangente en un punto $p \in S$ de la superficie S.



Vector normal

Vector normal a S en p

El vector normal $N(p)$ es un vector perpendicular unitario ($\|N(p)\| = 1$) al plano tangente en un punto $p \in S$ de la superficie S.

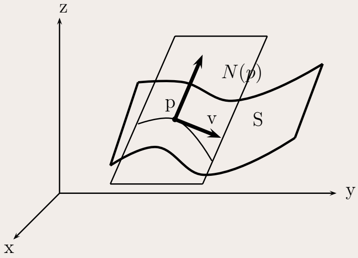


Para determinar $N(p)$ hay que elegir una orientación.

Secciones normales

Secciones normales a S en $p \in S$

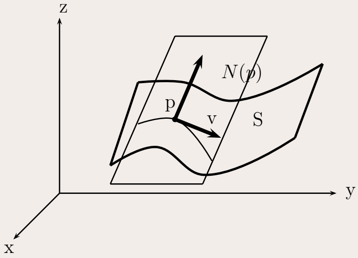
Una sección normal a S en p es una curva resultante de la intersección de un plano P por p que contiene el vector normal $N(p)$.



Secciones normales

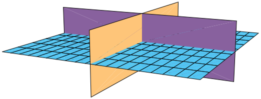
Secciones normales a S en $p \in S$

Una sección normal a S en p es una curva resultante de la intersección de un plano P por p que contiene el vector normal $N(p)$.

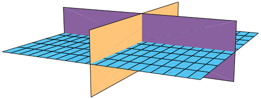


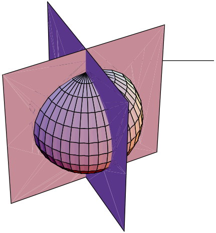
El vector tangente v en p a la sección normal pertenece al plano P.

Ejemplos de secciones normales

- 

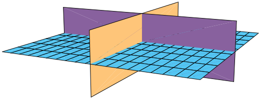
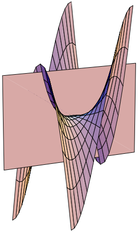
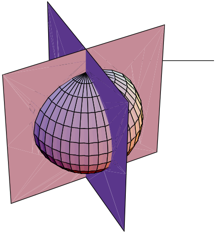
Ejemplos de secciones normales

- 

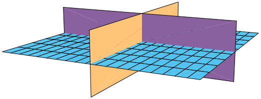


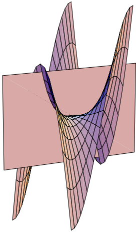
-

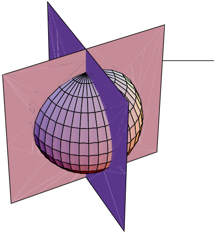
Ejemplos de secciones normales

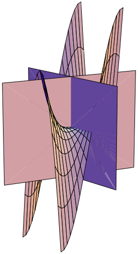
- 
- 
- 

Ejemplos de secciones normales

- 

- 

- 

- 

Curvaturas principales

Curvaturas principales de S en $p \in S$

- Las curvaturas principales $k_1(p)$, $k_2(p)$ de la superficie S en un punto p son el máximo y el mínimo de las curvaturas de todas las secciones normales en el punto p.

Curvaturas principales

Curvaturas principales de S en $p \in S$

- Las curvaturas principales $k_1(p)$, $k_2(p)$ de la superficie S en un punto p son el máximo y el mínimo de las curvaturas de todas las secciones normales en el punto p.
- Un vector velocidad unitario $v(p)$ de una sección normal a la superficie S en p es una dirección principal si la curvatura de la sección normal en el punto p es una de las curvaturas principales.

Curvaturas principales

Curvaturas principales de S en $p \in S$

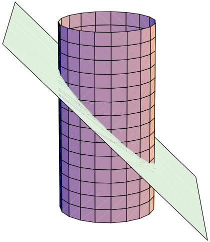
- Las curvaturas principales $k_1(p)$, $k_2(p)$ de la superficie S en un punto p son el máximo y el mínimo de las curvaturas de todas las secciones normales en el punto p.
- Un vector velocidad unitario $v(p)$ de una sección normal a la superficie S en p es una dirección principal si la curvatura de la sección normal en el punto p es una de las curvaturas principales.
- Si las curvaturas principales en p son diferentes

$$k_1(p) \neq k_2(p)$$

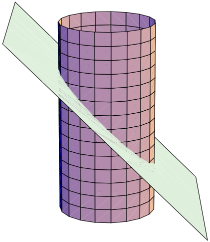
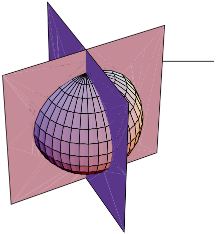
entonces las direcciones principales son perpendiculares.

$$\langle v_1(p), v_2(p) \rangle = 0.$$

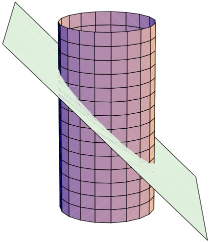
Mas secciones normales

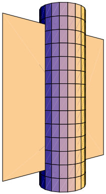
- 

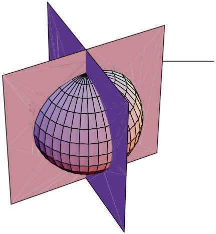
Mas secciones normales

- 
- 

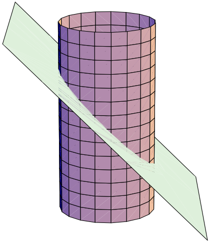
Mas secciones normales

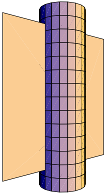


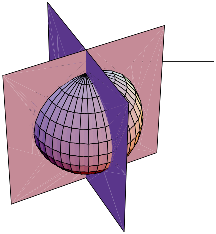


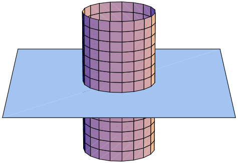


Mas secciones normales









Superficies: versión moderna

Superficie parametrizada

Una superficie parametrizada está formada por “pedacitos de planos“ deformados.

Superficies: versión moderna

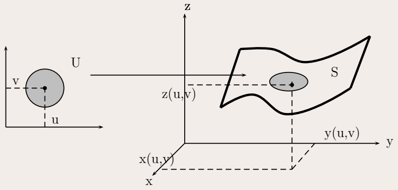
Superficie parametrizada

Una superficie parametrizada está formada por “pedacitos de planos“ deformados.

Una parametrización

Sea U un disco (abierto) del plano. Una parametrización es:

$$(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \subset \mathbb{R}^3.$$



Curvaturas

Curvatura de Gauss de S en $p \in S$

Curvatura de Gauss

$$K(p) = k_1(p)k_2(p)$$

Curvaturas

Curvatura de Gauss de S en $p \in S$

Curvatura de Gauss

$$K(p) = k_1(p)k_2(p)$$

Curvatura media de S en $p \in S$

Curvatura media

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

Curvaturas

Curvatura de Gauss de S en $p \in S$

Curvatura de Gauss

$$K(p) = k_1(p)k_2(p)$$

Curvatura media de S en $p \in S$

Curvatura media

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$$

Polémica

Karl Gauss X Sophie Germain

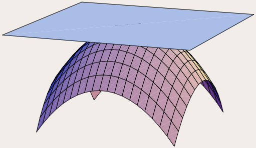
S. Germain definió la curvatura media durante el estudio de algunos problemas de elasticidad.

Curvaturas

Signo de la curvatura

- $$K(p) > 0 \iff \text{los signos de } k_1(p),\ k_2(p) \text{ son iguales.}$$

  La superficie S está “a un lado” del plano tangente cerca de p.

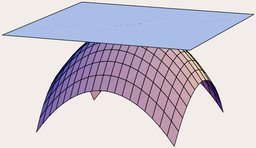


Curvaturas

Signo de la curvatura

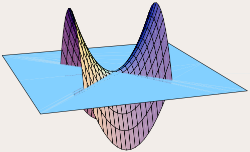
- $$K(p) > 0 \iff \text{los signos de } k_1(p),\ k_2(p) \text{ son iguales.}$$

  La superficie S está "a un lado" del plano tangente cerca de p.

- $$K(p) < 0 \iff \text{los signos de } k_1(p),\ k_2(p) \text{ son opuestos.}$$

  La superficie S "atraviesa" el plano tangente cerca de p.

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.
2. Inició la teoría de las superficies. Introdujo las secciones normales.

Reserches sur la courbure des surfaces - 1767.

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.
2. Inició la teoría de las superficies. Introdujo las secciones normales.

Reserches sur la courbure des surfaces - 1767.

Gaspard Monge (1746-1818)

Ingeniero militar organizador y director de la Escuela Politécnica durante la totalidad del imperio de Napoleón.

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.
2. Inició la teoría de las superficies. Introdujo las secciones normales.

Reserches sur la courbure des surfaces - 1767.

Gaspard Monge (1746-1818)

Ingeniero militar organizador y director de la Escuela Politécnica durante la totalidad del imperio de Napoleón.

1. Iniciador de la teoría de las curvas en el espacio tridimensional para la aplicación en problemas de fortificaciones.

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.
2. Inició la teoría de las superficies. Introdujo las secciones normales.

Reserches sur la courbure des surfaces - 1767.

Gaspard Monge (1746-1818)

Ingeniero militar organizador y director de la Escuela Politécnica durante la totalidad del imperio de Napoleón.

1. Iniciador de la teoría de las curvas en el espacio tridimensional para la aplicación en problemas de fortificaciones.
2. Autor del primer texto de Geometría diferencial:

Applications de l'analyse a la geometrie - 1795

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.
2. Inició la teoría de las superficies. Introdujo las secciones normales.

   Reserches sur la courbure des surfaces - 1767.

Gaspard Monge (1746-1818)

Ingeniero militar organizador y director de la Escuela Politécnica durante la totalidad del imperio de Napoleón.

1. Iniciador de la teoría de las curvas en el espacio tridimensional para la aplicación en problemas de fortificaciones.
2. Autor del primer texto de Geometría diferencial:

   Applications de l'analyse a la geometrie - 1795
3. Algunos discípulos físicos y matemáticos: Laplace, Meusnier, Fourier, Ampere, Poisson, Poncelet, Dupin, Olinde Rodrigues...

Geómetras ilustres

Leonard Euler (1707-1783)

1. Desarrolló la teoría de curvas planas.
2. Inició la teoría de las superficies. Introdujo las secciones normales.

   Reserches sur la courbure des surfaces - 1767.

Gaspard Monge (1746-1818)

Ingeniero militar organizador y director de la Escuela Politécnica durante la totalidad del imperio de Napoleón.

1. Iniciador de la teoría de las curvas en el espacio tridimensional para la aplicación en problemas de fortificaciones.
2. Autor del primer texto de Geometría diferencial:

   Applications de l'analyse a la geometrie - 1795
3. Algunos discípulos físicos y matemáticos: Laplace, Meusnier, Fourier, Ampere, Poisson, Poncelet, Dupin, Olinde Rodrigues...
4. Superficies como una multitud de curvas que pasan por un punto.

Geómetras ilustres

Augustin Cauchy (1789-1857)

En 1826 probó la existencia del plano tangente en cada punto de una superficie.

Geómetras ilustres

Augustin Cauchy (1789-1857)

En 1826 probó la existencia del plano tangente en cada punto de una superficie.

Karl Frederich Gauss (1777-1855)

Consejero científico de 1821 hasta 1848 de los gobiernos de Hannover y Dinamarca para el estudio geodésico de sus territorios.

Geómetras ilustres

Augustin Cauchy (1789-1857)

En 1826 probó la existencia del plano tangente en cada punto de una superficie.

Karl Frederich Gauss (1777-1855)

Consejero científico de 1821 hasta 1848 de los gobiernos de Hannover y Dinamarca para el estudio geodésico de sus territorios.

1. Considerado el iniciador de la moderna Geometría Diferencial.

Geómetras ilustres

Augustin Cauchy (1789-1857)

En 1826 probó la existencia del plano tangente en cada punto de una superficie.

Karl Frederich Gauss (1777-1855)

Consejero científico de 1821 hasta 1848 de los gobiernos de Hannover y Dinamarca para el estudio geodésico de sus territorios.

1. Considerado el iniciador de la moderna Geometría Diferencial.
2. Disquisitions generales circa superficies 1828.

Geómetras ilustres

Augustin Cauchy (1789-1857)

En 1826 probó la existencia del plano tangente en cada punto de una superficie.

Karl Frederich Gauss (1777-1855)

Consejero científico de 1821 hasta 1848 de los gobiernos de Hannover y Dinamarca para el estudio geodésico de sus territorios.

1. Considerado el iniciador de la moderna Geometría Diferencial.
2. Disquisitions generales circa superficies 1828.
3. Las superficies como pedacitos de planos deformados y que por lo tanto pueden ser dotados de coordenadas.

La aplicación normal de Gauss

Conceptos fundamentales

- Los conceptos fundamentales para el estudio de las superficies son:

  Curvatura de Gauss / Curvatura media

  Aplicación normal de Gauss.

La aplicación normal de Gauss

Conceptos fundamentales

- Los conceptos fundamentales para el estudio de las superficies son:

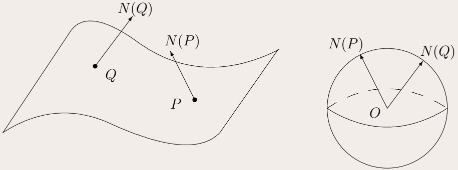
Curvatura de Gauss / Curvatura media

Aplicación normal de Gauss.

- LA APLICACION NORMAL DE GAUSS

$$N\colon\ S \to S^2(1)$$

de una superficie S toma valores en la esfera unitaria.



Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Olinde Rodrigues (1794-1851)

1. Banquero francés descendiente de portugueses.

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Olinde Rodrigues (1794-1851)

1. Banquero francés descendiente de portugueses.
2. Amigo íntimo de Saint-Simon (socialista utópico) siendo partidario y gran contribuidor financiero para su causa política.

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Olinde Rodrigues (1794-1851)

1. Banquero francés descendiente de portugueses.
2. Amigo íntimo de Saint-Simon (socialista utópico) siendo partidario y gran contribuidor financiero para su causa política.
3. Fervoroso feminista.

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Olinde Rodrigues (1794-1851)

1. Banquero francés descendiente de portugueses.
2. Amigo íntimo de Saint-Simon (socialista utópico) siendo partidario y gran contribuidor financiero para su causa política.
3. Fervoroso feminista.
4. Recherches sur la theorie analytiques des lignes et des rayons de courbure des surfaces... 1815.

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Olinde Rodrigues (1794-1851)

1. Banquero francés descendiente de portugueses.
2. Amigo íntimo de Saint-Simon (socialista utópico) siendo partidario y gran contribuidor financiero para su causa política.
3. Fervoroso feminista.
4. Recherches sur la theorie analytiques des lignes et des rayons de courbure des surfaces... 1815.

Geómetras ilustres

¿Los nombres curvatura y aplicación de Gauss se justifican?

1. La curvatura de Gauss fue utilizada primero por Euler y estudiada por Olinde Rodrigues!
2. La aplicación normal de Gauss fue estudiada primero por Olinde Rodrigues!

Olinde Rodrigues (1794-1851)

1. Banquero francés descendiente de portugueses.
2. Amigo íntimo de Saint-Simon (socialista utópico) siendo partidario y gran contribuidor financiero para su causa política.
3. Fervoroso feminista.
4. Recherches sur la theorie analytiques des lignes et des rayons de courbure des surfaces... 1815.
5. “Concevons une sphere d’un rayon egal a l’unite; puis faisons mouvoir la rayon de cete sphere, de maniere qu’il soit parallele a les normales de la surface...”

Gauss

Gauss

"Disquisitiones generales circa superficies curvas"

Investigación durante la cual las direcciones de varias rectas en el espacio son consideradas, obteniéndose un alto grado de claridad y simplicidad si utilizamos, como método auxiliar, una esfera de radio unitario y centro arbitrario y suponemos que los diferentes puntos de la esfera representan direcciones de rectas paralelas al radio en ese punto.

Gauss

Gauss

"Disquisitiones generales circa superficies curvas"

Investigación durante la cual las direcciones de varias rectas en el espacio son consideradas, obteniéndose un alto grado de claridad y simplicidad si utilizamos, como método auxiliar, una esfera de radio unitario y centro arbitrario y suponemos que los diferentes puntos de la esfera representan direcciones de rectas paralelas al radio en ese punto.

Teorema Egregium de Gauss

Sorprendente!

La curvatura de Gauss es invariante (o sea, no cambia) por la realización de deformaciones isométricas.

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Una deformación de una superficie es una deformación isométrica si la longitud de toda curva en la superficie es preservada por la deformación.

O sea, la superficie no se estira ni se contrae durante la deformación.

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Una deformación de una superficie es una deformación isométrica si la longitud de toda curva en la superficie es preservada por la deformación.

O sea, la superficie no se estira ni se contrae durante la deformación.

Superficie minimal

- Superficie minimal $\iff H = 0$ en todo punto.

$$k_1 + k_2 = 0.$$

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Una deformación de una superficie es una deformación isométrica si la longitud de toda curva en la superficie es preservada por la deformación.

O sea, la superficie no se estira ni se contrae durante la deformación.

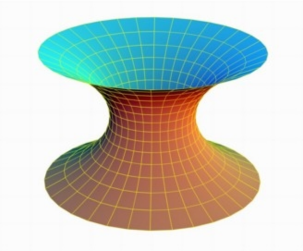
Superficie minimal

- Superficie minimal $\iff$ $H = 0$ en todo punto.

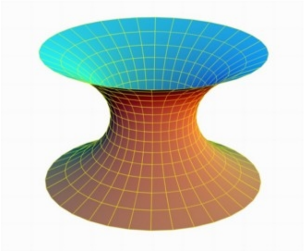
$$k_1 + k_2 = 0.$$

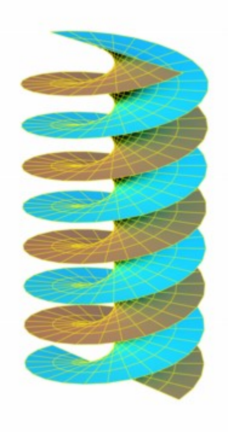
- FAMILIA ASOCIADA: Toda superficie minimal admite una familia de deformaciones isométricas (todas minimales).

Catenoide - Helicoide

- 

Catenoide - Helicoide

- 
-



-

Deformación isométrica

Deformaciones isométricas continuas

Deformaciones como las de las superficie minimales se llaman deformaciones isométrica continuas.

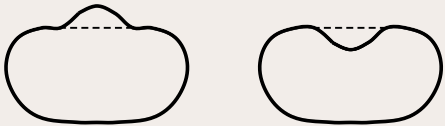
Deformación isométrica

Deformaciones isométricas continuas

Deformaciones como las de las superficie minimales se llaman deformaciones isométrica continuas.

Deformaciones isométricas discretas

El siguiente ejemplo corresponde a una deformación isométrica discreta.



Problema

Problema

PROBLEMA:

- Determinar todas las superficies que admiten deformaciones isométricas conservando la aplicación normal de Gauss.

Problema

Problema

PROBLEMA:

- Determinar todas las superficies que admiten deformaciones isométricas conservando la aplicación normal de Gauss.
- Determinar todas las deformaciones de una tal superficie.

Problema

Problema

PROBLEMA:

- Determinar todas las superficies que admiten deformaciones isométricas conservando la aplicación normal de Gauss.
- Determinar todas las deformaciones de una tal superficie.

A menos de...

Decir que las aplicaciones de Gauss son las mismas después de una deformación isométrica significa que ellas coinciden después de componer con rotaciones y reflexiones respecto de un plano por el centro de la esfera.

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Real Kaehler submanifolds and Uniqueness of the Gauss map.

M. Dajczer and D. Gromoll.

Journal of Differential Geometry - 1985

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Real Kaehler submanifolds and Uniqueness of the Gauss map.

M. Dajczer and D. Gromoll.

Journal of Differential Geometry - 1985

RESPUESTA

Las superficies que admiten deformaciones isométricas conservando la aplicación normal de Gauss son:

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Real Kaehler submanifolds and Uniqueness of the Gauss map.

M. Dajczer and D. Gromoll.

Journal of Differential Geometry - 1985

RESPUESTA

Las superficies que admiten deformaciones isométricas conservando la aplicación normal de Gauss son:

1. Caso continuo:

   Las superficies minimales.

Deformación isométrica

Deformación isométrica

Real Kaehler submanifolds and Uniqueness of the Gauss map.

M. Dajczer and D. Gromoll.

Journal of Differential Geometry - 1985

RESPUESTA

Las superficies que admiten deformaciones isométricas conservando la aplicación normal de Gauss son:

1. Caso continuo:

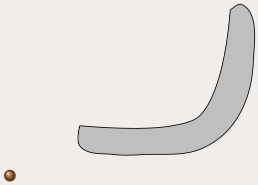
   Las superficies minimales.

2. Caso discreto:

   La curvatura de Gauss es $K = 0$ y su geometría es como sigue.

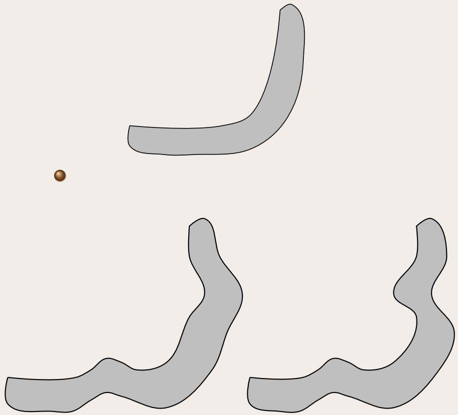
Deformación isométrica

Deformación isométrica



Deformación isométrica

Deformación isométrica



FIN

GRACIAS!

Una introducción elemental al concepto de curvatura

MARCOS DAJCZER
IMPA – Rio de Janeiro – Brasil

MURCIA

2015