Seminario de Matematicas

Universidad de Murcia 19 de Noviembre de 2015

El potencial de Hardy: Monstruo y Amigo

Ireneo Peral

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Realizado dentro del proyectot MTM2013–40846-P, MINECO, España

Justificación del título

Durante los últimos 20 años uno de los temas que me han ocupado ha sido el estudio de problemas críticos.

El llamado potencial de Hardy (o de Leray-Hardy) es un caso crítico.

El potencial de Hardy:

- **Es realmente un *amigo* porque hemos compartido un buen tiempo juntos, aportando no pocos resultados.**
- **Es también un *monstruo* porque tiene comportamientos perversos como veremos.**

Este tipo de comportamiento hace que sea en un laboratorio perfecto para experimentar situaciones críticas en diversos contextos.

La conferencia está en parte basada en las reflexiones que surgieron al impartir el curso:

Elliptic and Parabolic Problems involving Hardy-Leray Potential, **en los cursos de verano de la SMI en Cortona, Italia, 15-26 de julio de 2013 (14 lecciones).**

El punto de partida

La desigualdad de Hardy unidimensional.

- *Desigualdad de Hardy discreta.-* **Sea** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n \geq 0$ **entonces para todo número real** $p > 1$ **se tiene**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

- *Desigualdad de Hardy continua.- Si* f *es una función integrable* $f(x) \geq 0$, *entonces,*

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)\int_0^{\infty} f(s)^p ds, \qquad (1)$$

además la igualdad solo se tiene si $f \equiv 0$.

G.H. Hardy, *Note on a Theorem of Hilbert*, **Math. Z. 6 (1920), 314-317.**

La desigualdad de Leray

La fórmula (1.14) en el artículo seminal de J. Leray,

J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* **Acta Math. 63, no. 1 (1934), 193–248,**

establece la desigualdad básica en dimensión $N = 3$, que llamaremos la

Desigualdad de Hardy-Leray.

Sea u una función con primeras derivadas $u_{x_i} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2, 3$, *entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \tag{2}$$

La prueba de Leray se basa en la fórmula de representación con respecto a la solución fundamental de las soluciones de la ecuación de Stokes estacionaria.

Todas estas desigualdades son Matemática Pura.

Sin embargo, el potencial de Hardy-Leray aparece por doquier.

Motivacion del potencial de Hardy-Leray

El potencial de Hardy-Leray aparece, for ejemplo, en:

- **Mecánica Cuántica. Véanse,**

K.M. Case, *Singular potentials*, Physical Review 80 (1950) no 1, 797-806

N. F. Mott, H.S.W. Massey, *Theory of Atomic Collisions*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

C. L. Fefferman, *The uncertainty principle.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9, no. 2 (1983), 129–206.

E. H. Lieb, H. Yau, The Stability and Instability of Relativistic Matter, Commun. Math. Phys. 118, (1988) 177-213

La desigualdad de Hardy-Leray es una expresión del principio de incertidumbre en dimensión $N \geq 3$.

- **Astrofísica: Kelvin, Emden, Fowler, Chandrasekar, Hopf. Véase,**

S. Chandrasekar, *An introduction to the study of stellar structure,* Dover Publ. Inc. New York , 1985.

- **Teoría de la combustión. Véase**

D.A. Frank-Kamenenetskii, *Diffusion and heat transfer in chemical kinetics*, Plenum Press, New York, 1969.

La desigualdad de Hardy-Leray.

Se formula la extensión a dimensión $N \geq 3$ de la desigualdad de Hardy-Leray.

Teorema. *(Desigualdad de Hardy-Leray)*

Sea $N \geq 3$. Para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ se verifica la siguiente desigualdad,

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2(x)}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi(x)|^2 dx. \tag{3}$$

Por densidad, la desigualdad se extiende a $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, La complección de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con respecto a la seminorma

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Una demostración elemental debida a Luc Tartar.

La sumabilidad de ambos miembros es evidente. Se considera para $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
&0 \le \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla\phi(x) + \lambda \frac{x}{|x|^2}\phi(x), \nabla\phi(x) + \lambda \frac{x}{|x|^2}\phi(x)\rangle = \\
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi(x)|^2 dx + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla\phi(x), \frac{x}{|x|^2}\phi(x)\rangle + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2(x)}{|x|^2} dx.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ahora

$$
2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla\phi(x), \frac{x}{|x|^2}\phi(x)\rangle dx = -2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x)^2 \mathbf{div}(\frac{x}{|x|^2}) dx = -\lambda(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi^2(x)}{|x|^2} dx.
$$

Entonces, (4) **se convierte en**

$$
0 \le \int_{\mathbb{R}^N} \{|\nabla\phi(x)|^2 dx + (\lambda^2 - \lambda(N-2)) \frac{\phi^2(x)}{|x|^2}\} dx, \quad \forall \lambda > 0.
$$

Dado que la función cuadrática $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(N-2)$ **tiene un mínimo en** $\lambda_0 = \dfrac{N-2}{2}$ **y**

$$
f(\lambda_0) = -\left(\frac{N-2}{2}\right)^2, \text{ se concluye la desigualdad (3).}
$$

Algunas observaciones.

Observaciones.

Se denota

$$V(x) \equiv \frac{1}{|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3.$$

Entonces, se tiene,

1. $V \in \mathcal{M}^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N)$, **espacio de Marcinkiewick.**
2. $V \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ **si** $1 < p < \dfrac{N}{2}$.

Llamando

$$\Lambda_N = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$$

Se probará que,

- Λ_N **es la constante óptima en la desigualdad** (3).
- Λ_N **no se alcanza en el espacio de la energía** $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

Estas propiedades son el motivo del peculiar comportamiento espectral del Laplaciano, $-\Delta$**, con el peso** $V(x)$**.**

La teoría clásica de autovalores

Sea el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) u, & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y $f \in L^p(\Omega)$ con $p \geq \frac{N}{2}$ y $f(x) \geq 0$.
El cociente de Rellich

$$\lambda_1(f) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega),\, ||u||_{W^{1,2}(\Omega)}=1} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x) u^2 dx}$$

se alcanza en una función $\phi_1 \in W^{1,2}(\Omega)$, que es una autofunción para el autovalor principal $\lambda_1(f)$.

Nótese que $\lambda_1(f) =$constante óptima de la desigualdad de Poincaré, al cuadrado.

Hecho diferencial

El potencial de Hardy $V \in \mathcal{M}^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N)$, es decir, pertenece a $L^{\frac{N}{2}}$-débil y el ínfimo del cociente de Rellich, como se verá, no se alcanza.

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

Se denota

$$\Lambda_N = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2. \tag{5}$$

Se prueban:

- Λ_N **es la constante óptima en la desigualdad de Hardy-Leray**
- Λ_N **no se alcanza en** $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$**.**

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible Lebesgue,

$$u : E \to \mathbb{R}$$

una función medible y sea $m(E)$ la medida Lebesgue de E.
Como es habitual se define la función de distribución de u por

$$\begin{array}{rcll} [0,\infty] : & \to & [0,\infty] & \\ t : & \to & \mu(t) = & m(\{x \in E \, |u(x)| > t\}). \end{array}$$

El reordenamiento decreciente de u se define como la función de distribución de u, es decir,

$$u^*(s) = m(\{t \geq 0 \, \mu(t) > s\})$$

El reordenamiento simétrico de u, $u^\star$, se define por

$$u^\star(x) = u^*(\omega_N |x|^N), \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

donde ω_N es la medida de la bola unidad en $\mathbb{R}^N$.

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

Propiedades del reordenamiento simétrico

1. *(Hardy-Littlewood)*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^\star(x)v^\star(x)dx \tag{6}$$

2. *(F. Riesz)*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\int_{\mathbb{R}^N} v(y)w(x-y)dydx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u^\star(x)\int_{\mathbb{R}^N} v^\star(y)w^\star(x-y)dydx \tag{7}$$

3. *(Polya-Szegö)* **Sea**

$$\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

función convexa y creciente con $\Phi(0) = 0$**.**
Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ **entonces**

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u(x)|)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\nabla u^\star(x)|)dx. \tag{8}$$

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

Optimalidad de la constante. **Para $\epsilon > 0$, se toma la función radial,**

$$U_\epsilon(r) = \begin{cases} A_{N,\epsilon} & \textbf{si} \quad r \in [0,1], \\ A_{N,\epsilon} r^{\frac{2-N}{2}-\epsilon} & \textbf{si} \quad r > 1, \end{cases} \tag{9}$$

donde $A_{N,\epsilon} = 2/(N-2+2\epsilon)$. Su derivada es,

$$U'_\epsilon(r) = \begin{cases} 0, & \textbf{si} \quad r \in [0,1], \\ -r^{-\frac{N}{2}-\epsilon} & \textbf{si} \quad r > 1. \end{cases} \tag{10}$$

Por un cálculo directo resulta,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{U_\epsilon^2(x)}{|x|^2}dx = \int_B \frac{U_\epsilon^2(x)}{|x|^2}dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B} \frac{U_\epsilon^2(x)}{|x|^2}dx =$$

$$= A_{N,\epsilon}^2\omega_N \int_0^1 r^{N-3}dr + A_{N,\epsilon}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\epsilon(x)|^2 dx,$$

donde ω_N es la medida de la $(N-1)$-dimensional esfera unidad.

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

Por tanto, dado $A_{N,\epsilon} < \Lambda_N$, $\epsilon > 0$, **existe** $U_\epsilon \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ **tal que**

$$A_{N,\epsilon}^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\epsilon(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{U_\epsilon^2(x)}{|x|^2} dx.$$

El argumento de optimalidad para la bola $B_R(0)$ **se obtiene como sigue:**

1. **La constante resulta invariante frente a dilataciones.**
2. **Sea** $B_R(0)$ **una bola con radio suficientemente grande. Tomando como función test a** $v(x) = \psi(x)U(x)$ **donde** U **es como antes y** $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R)$ **es una funcion corte que es identicamente** 1 **en** B_{R-1} **y con** $|\nabla\psi| \leq m$.

   Se ve facilmente que para $R \gg 1$ **la influencia de** ψ **en el cálculo anterior es despreciable.**

Claramente el mismo argumento se puede hacer en un dominio Ω **tal que** $0 \in \Omega$ **y para el espacio** $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

Λ_N no se alcanza. **Usando las propiedades del reordenamiento simétrico, para toda $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, se tiene:**

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u^\star(x))^2}{|x|^2} dx$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^\star(x)|^2 dx.$$

entonces

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^2}{|x|^2} dx} \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^\star(x)|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u^\star(x))^2}{|x|^2} dx} \geq \Lambda_N. \tag{11}$$

Entonces si los minimizantes existen, han de ser radiales.

Λ_N es la constante óptima y no se alcanza

La correspondiente equación de Euler es

$$u''(r) + (N-1)\frac{u'(r)}{r} + \Lambda_N \frac{u}{r^2} = 0,$$

que integrando elementalmente da

$$u(r) = r^{-\left(\frac{N-2}{2}\right)}(a_1 + a_2 \lg(r)), \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Nótese que los minimizantes no pertenecen a $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

En otras palabras Λ_N, no es un autovalor con datos Dirichtlet en dominios acotados conteniendo el polo del potencial.

Resultados clásicos

Consideremos la solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

La teoría de Calderón-Zygmund establece la estimación clave:

$$||u||_{W^{2,m}(\Omega)} \leq C||f||_m, \text{ si } 1 < m < \infty.$$

(Si $m = 1$ o $m = \infty$ el resultado en general no es cierto).

En particular, usando la desigualdad de Sobolev se obtiene:

- **Si** $f \in L^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$, **entonces** $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$;
- **Si** $f \in L^m(\Omega)$, $\frac{2N}{N+2} \leq m \leq \frac{N}{2}$ **entonces** $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{m^{**}}(\Omega)$, $m^{**} = \frac{Nm}{N-2m}$;
- **Si** $f \in L^m(\Omega)$, $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ **entonces** $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$, $m^* = \frac{Nm}{N-m}$.

El objetivo es analizar la influencia del término de perturbación de orden cero de la forma $\lambda\dfrac{u}{|x|^2}$ en la sumabilidad de las soluciones de los problemas elípticos en términos de λ.

Summabilidad dependiendo de *lambda*

Anticipamos que

la regularidad sorprendentemente depende del valor espectral λ.

La referencia para esta sección es

L. Boccardo, L. Orsina, I. Peral, *A remark on existence and optimal summability of solutions of elliptic problems involving Hardy potential.* **Discrete Contin. Dyn. Syst. 16, no. 3 (2006), 513–523.**

Sean $\alpha_-(\lambda)$ y $\alpha_+(\lambda)$ las raices de $\alpha^2-(N-2)\alpha+\lambda=0$. Es decir,

$$\alpha_-(\lambda)=\frac{N-2}{2}-\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2-\lambda},\ \alpha_+(\lambda)=\frac{N-2}{2}+\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2-\lambda},\quad (12)$$

Tales raices dan las soluciones radiales, $|x|^{-\alpha_-(\lambda)}$ y $|x|^{-\alpha_+(\lambda)}$ a la ecuación,

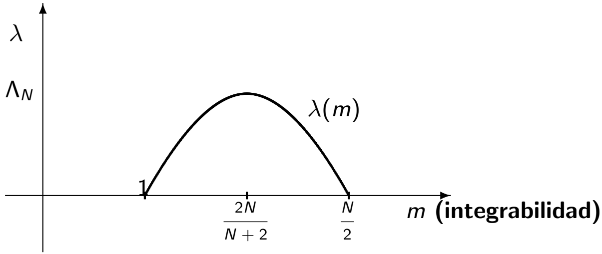
$$-\Delta w-\lambda\frac{w}{|x|^2}=0.$$

El problema que se va a estudiar es el problema de Dirichlet para $f(x)\geq 0$,

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda\dfrac{u}{|x|^2}+f, & \text{en } \Omega,\ 0\in\Omega,\\ u=0 & \text{en } \partial\Omega.\end{cases}\quad (13)$$

Curva crítica de λ

Se obtendrá la curva crítica, $\lambda(m) = \dfrac{N(m-1)(N-2m)}{m^2}$.



Bajo la curva $\lambda = \lambda(m)$ el potencial de Hardy no modifica la sumabilidad dada por la teoría de Calderón-Zygmund.
Sobre la curva el potencial influye y no se verifica la integrabilidad de la teoría de Calderón-Zygmund.

Summabilidad dependiendo de λ: $m > \frac{N}{2}$

Primer resultado.

Si $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq \frac{N}{2}$, incluso si $f \in L^\infty$, entonces $u \in L^1(\Omega)$ la solución débil de (13), no es acotada.

En efecto, por el principio del máximo se tiene $u > 0$ y entonces, además,

$$-\Delta u > 0.$$

Por tanto, por la desigualdad de Harnack, existe $\eta > 0$ tal que,

$$u \geq \eta \text{ en } B_r(0) \subset \Omega.$$

Por el principio de comparación débil $u \geq v$ in $B_r(0)$, donde v es la solución al problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda \dfrac{\eta}{|x|^2} & \text{en } B_r(0), \\ v = 0 & \text{en } \partial B_r(0). \end{cases}$$

que elementalmente se prueba que no es acotada.

Es decir, ocurre lo contrario que en el caso $\lambda = 0$

Summabilidad dependiendo de λ: $m = 1$

Segundo resultado.

El hecho de ser el problema lineal y teniendo en cuenta el resultado previo, permite probar por dualidad que

en general el problema (13), no tiene solución para $f \in L^1(\Omega)$.

Dada $f \in L^1(\Omega)$ $u \in L^1(\Omega)$ *verificando que* $\dfrac{u}{|x|^2} \in L^1(\Omega)$, *se dice que es una solución débil de la ecuación*

$$-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = f,$$

si y solo si

$$\int_\Omega u \left(-\Delta\phi - \lambda \frac{\phi}{|x|^2} - f\phi \right) dx = 0, \ \textit{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Se dice que el problema está bien propuesto en $L^1(\Omega)$ si existe $C > 0$ tal que

$$||u||_1 \le C||f||_1, \ \textbf{para toda } f \in L^1(\Omega).$$

Summabilidad dependiendo de *lambda*: $m = 1$

Proposición.

El problema (13) no está bien propuesto en $L^1(\Omega)$.

Si, por contradicción, para cada $f \in L^1(\Omega)$ existe $u \in L^1(\Omega)$, solución débil del problema (13) para $g \in L^\infty(\Omega)$ sea $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ la solución de

$$-\Delta\psi - \lambda\frac{\psi}{|x|^2} = g\,.$$

Entonces

$$\left|\int_\Omega f\psi dx\right| = \left|\int_\Omega gudx\right| \le ||g||_\infty ||u||_1 \le C||g||_\infty ||f||_1\,.$$

Pero entonces, tomando el ínfimo en $f \in L^1(\Omega)$, $||f||_1 \le 1$, se obtiene que

$$||\psi||_\infty \le C||g||_\infty\,,$$

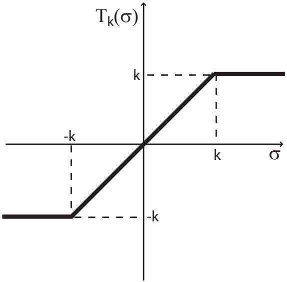
que es falso en general, como se probó previamente.

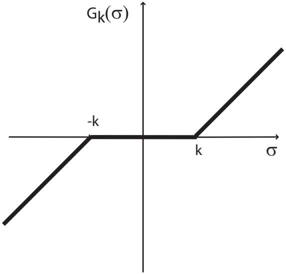
Summabilidad dependiendo de *lambda*: $1 < m < \frac{N}{2}$

Se considera

$$0 < \lambda < \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 = \Lambda_N, \quad \textbf{y } f \in L^m, \; 1 < m < \frac{N}{2}.$$

Las funciones de truncamiento clásicas son:





Se tiene que $\sigma = G_k(\sigma) + T_k(\sigma)$

Summabilidad dependiendo de *lambda*: $1 < m < \frac{N}{2}$

De acuerdo con la sumabilidad del dato se obtendrá el valor crítico de $\lambda(m)$.
Se consideran los dos casos naturales:

- **Sumabilidad de soluciones de energía finita, es decir, si** $\dfrac{2N}{N+2} \leq m \leq \dfrac{N}{2}$
- **Sumabilidad de soluciones débiles, es decir, si** $1 < m < \dfrac{2N}{N+2}$**.**

Para obtener estimaciones se consideran los problemas de Dirichlet aproximados,

$$u_n \in W_0^{1,2}(\Omega): \ -\Delta u_n = \lambda \frac{u_n}{|x|^2 + \frac{1}{n}} + f_n \,, \ \textbf{donde } f_n(x) = T_n(f(x)). \qquad (14)$$

Recordatorio

Si $1 \leq p < N$ **el conjugado de Sobolev,** p^***, de** p**, es**

- $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$**; por tanto,** $p^{**} = \dfrac{Np}{N-2p}$ **(si** $p < \frac{N}{2}$**)**

Summabilidad soluciones de energía: $\frac{2N}{N+2} < m < \frac{N}{2}$

Teorema

Sea $f \in L^m$, $\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}$, **y**

$$\lambda < \frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2} \tag{15}$$

entonces la solución de energía u **de** (13) **pertenece a** $L^{m^{**}}(\Omega)$,
$m^{**} = \dfrac{Nm}{N-2m}$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n **solución al problema aproximado** (14) **verifica** $u_n \in L^\infty(\Omega)$.

Se considera $\gamma = \dfrac{m(N-2)}{N-2m}$. **Como** $m \geq \frac{2N}{N+2}$ **se tiene que** $\gamma \geq 2$.

Como función test (no lineal) en (14) **se toma** $|u_n|^{\gamma-2}u_n$.

Summabilidad soluciones de energía: $\frac{2N}{N+2} < m < \frac{N}{2}$

Entonces,

$$\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}\int_\Omega |\nabla |u_n|^{\frac{\gamma}{2}}|^2 \le \lambda \int_\Omega \left(\frac{|u_n|^{\frac{\gamma}{2}}}{|x|}\right)^2 + ||f_n||_{L^m}\left(\int_\Omega |u_n|^{(\gamma-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} ,$$

y por tanto, por la desigualdad de Hardy,

$$\left[\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} - \lambda\Big(\frac{2}{N-2}\Big)^2\right]\int_\Omega |\nabla |u_n|^{\frac{\gamma}{2}}|^2 \le ||f_n||_{L^m}\left(\int_\Omega |u_n|^{(\gamma-1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} .$$

Nótese que para obtener una estimación *a priori* **ha de ser**

$$\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} > \lambda\Big(\frac{2}{N-2}\Big)^2, \tag{16}$$

es decir,

$$(\gamma-1)(N-2)^2 > \lambda\gamma^2 .$$

que es justamente la restricción (15)

$$\lambda < \frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2},$$

y que la justifica.

Summabilidad soluciones de energía: $\frac{2N}{N+2} < m < \frac{N}{2}$

Por cálculo aritmético, la definición de γ **da** $\dfrac{\gamma 2^*}{2} = (\gamma - 1)m' = m^{**}$**.**

Sea $\mathcal{S}$ **la mejor constante de la inclusión de Sobolev. Resulta**

$$\mathcal{S}^2 \left[\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} - \lambda\Big(\frac{2}{N-2}\Big)^2\right] \left(\int_\Omega |u_n|^{m^{**}}\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq ||f_n||_{L^m}\,,$$

por tanto,

$$\Big(\frac{\mathcal{S}}{\Lambda_N}\Big)^2 \Big[\lambda(m) - \lambda\Big] ||u_n||_{L^{m^{**}}} \leq ||f_n||_{L^m}\,. \qquad (17)$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ **se obtiene el resultado pues** u_n **converge a la solución** u **de** (13)**.**

Summabilidad soluciones de energía: $\frac{2N}{N+2} < m < \frac{N}{2}$

Optimalidad de (15)

Se considera el problema (13) **en** $\Omega = B_1(0)$ **y siendo** $f(x) = \dfrac{1}{|x|^\nu}$**, con** $\nu = \dfrac{N}{m}$**. En coordenadas radiales,**

$$-u''(r) - \frac{(N-1)}{r}u'(r) - \lambda\frac{u(r)}{r^2} = \frac{1}{r^\nu}, \quad u(1) = 0, \qquad 0 < \lambda \leq \Lambda_N\,. \tag{18}$$

Por integración elemental la solución de (18)**,** $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ **es**

$$u(r) = \frac{1}{(2-\nu)(1-\nu) + (N-1)(2-\nu) + \lambda}[r^{\alpha_+} - r^{2-\nu}].$$

y como $\nu = \dfrac{N}{m}$**, los coeficientes son,**

$$\frac{1}{(2-\nu)(1-\nu) + (N-1)(2-\nu) + \lambda} = \frac{1}{(2-\frac{N}{m})(1-\frac{N}{m}) + (N-1)(2-\frac{N}{m}) + \lambda}.$$

Como $\lambda > N\dfrac{(m-1)(N-2m)}{m^2}$**, entonces** $2-\nu > \alpha_+$**, es decir la sumabilidad de** u **es la sumabilidad de** r^{α_+} **y** r^{α_+} **que no pertenecen a** $L^{m^{**}}$**.**

Summabilidad de soluciones débiles: $1 < m < \frac{2N}{N+2}$

Teorema.

En la ecuación (13) se supone $f \in L^m$, $1 < m < \frac{2N}{N+2}$, y

$$\lambda < \frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2},$$

entonces la solución débil de (13), u, verifica que $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$.

Idea de la demostración.

Como en el caso anterior sea u_n la solución a (14).
Para $\epsilon > 0$ se considera la función test para (14)

$$v_\epsilon = [(\epsilon + |u_n|)^{\gamma-1} - \epsilon^{\gamma-1}]\mathrm{sgn}(u_n),$$

donde $\gamma = \dfrac{(N-2)m}{N-2m}$.

Summabilidad de soluciones débiles: $1 < m < \frac{2N}{N+2}$

Se obtiene

$$(\gamma-1)\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(\epsilon+|u_n|)^{2-\gamma}} = \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}\int_\Omega |\nabla[(\epsilon+|u_n|)^{\frac{\gamma}{2}}-\epsilon^{\frac{\gamma}{2}}]|^2$$
$$\leq \lambda\int_\Omega \Big(\frac{(\epsilon+|u_n|)^{\frac{\gamma}{2}}-\epsilon^{\frac{\gamma}{2}}}{|x|}\Big)^2 dx + \lambda\int_\Omega \frac{1}{|x|^2}\Big(u_n v_\epsilon - [(\epsilon+|u_n|)^{\frac{\gamma}{2}}-\epsilon^{\frac{\gamma}{2}}]^2\Big)dx +$$
$$\int_\Omega f_n v_\epsilon dx\,.$$

Por las desigualdades de Hardy y Sobolev se obtiene,

$$\mathcal{S}^2\Big[\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}-\frac{\lambda}{\Lambda_N}\Big]\Big(\int_\Omega(\epsilon+|u_n|)^{\gamma\frac{2^*}{2}}dx\Big)^{\frac{2}{2^*}}$$
$$\leq \lambda\int_\Omega \frac{1}{|x|^2}\Big(|u_n||(\epsilon+|u_n|)^{\gamma-1}-\epsilon^{\gamma-1}| - [(\epsilon+|u_n|)^{\frac{\gamma}{2}}-\epsilon^{\frac{\gamma}{2}}]^2\Big)dx + \int_\Omega f_n v_\epsilon dx.$$

Fijo n y tomando límite para $\epsilon \to 0$ resulta,

$$\mathcal{S}^2\Big[\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}-\frac{\lambda}{\Lambda_N}\Big]\Big(\int_\Omega |u_n|^{\gamma\frac{2^*}{2}}dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq ||f_n||_m\Big(\int_\Omega |u_n|^{(\gamma-1)m'}\Big)^{\frac{1}{m'}}.$$

Summabilidad de soluciones débiles: $1 < m < \frac{2N}{N+2}$

Así se tiene,

$$\left(\frac{2\mathcal{S}}{N-2}\right)^2\left[\frac{N(m-1)(N-2m)}{m^2}-\lambda\right]||u_n||_{L^{m^{**}}} \leq ||f_n||_{L^m}\,.$$

Es decir, se obtiene la siguiente estimación *a priori***:**

$$\left(\frac{\mathcal{S}^2}{\Lambda_N}\right)\left[\lambda(m)-\lambda\right]||u_n||_{L^{m^{**}}} \leq ||f_n||_{L^m}\,. \qquad (19)$$

Se prueba a continuación que $\{u_n\}$ es acotada en $W_0^{1,m^*}(\Omega)$.
Fijo $\epsilon = R$ en la función test y usando (19), se tiene,

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(R+|u_n|)^{(2-\gamma)}} \leq C(\lambda, m, N, , \mathcal{S}, R) = M\,.$$

Usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{2}{m^*}$ y $\frac{2}{2-m^*}$,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{m^*} \leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{m^*}}{(R+|u_n|)^{\frac{(2-\gamma)m^*}{2}}}(R+|u_n|)^{\frac{(2-\gamma)m^*}{2}} \leq M^{\frac{m^*}{2}}\left(\int_\Omega (R+|u_n|)^{\frac{(2-\gamma)m^*}{2-m^*}}\right)^{\frac{2-m^*}{2}}$$

Summabilidad de soluciones débiles: $1 < m < \frac{2N}{N+2}$

Entonces como $\frac{(2-\gamma)m^*}{2-m^*} = m^{**}$, se deduce que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{m^*} \leq M^{\frac{m^*}{2}} \left(\int_\Omega (R + |u_n|)^{m^{**}} \right)^{\frac{2-m^*}{2}}.$$

que implica la acotación de la sucesión $\{u_n\}$ en $W_0^{1,m^*}(\Omega)$.
Como $m > 1$, la reflixividad del espacio implica que existe $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$ tal que para alguna subsucesión,

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ debilmente en } W_0^{1,m^*}(\Omega), \qquad \text{en casi todo pundo, y}$$

$$\frac{u_n}{|x|^2} \to \frac{u}{|x|^2} \text{ fuertemente en } L^1(\Omega).$$

Por tanto tomando límites en (14) se prueba que u es una solución distribucional de (13).

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

Los resultados en este caso aparecen en el artículo

H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei, *On a semilinear elliptic equation with inverse-square potential.* **Selecta Math. (N.S.) 11, no. 1 (2005), 1–7.**

Potencia óptima. Sea la ecuación,

$$-\Delta u = \frac{\lambda u}{|x|^2} + u^p, \qquad u \geq 0. \tag{20}$$

Se calculan soluciones radiales positivas, es decir, soluciones positivas a la ecuación diferencial ordinaria

$$-u'' - \frac{(N-1)}{r}u' - \lambda\frac{u}{r^2} = u^p, \tag{21}$$

donde $0 < \lambda \leq \Lambda_N$**.**

Por razones de homogeneidad se buscan soluciones de la forma,

$$\phi(r) = Ar^{-\beta}, \text{ donde } A, \beta > 0.$$

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

En orden a tener una solución de la forma anterior, se ha de verificar la identidad,

$$Ar^{-(\beta+2)}\Big(-\beta(\beta+1)+(N-1)\beta-\lambda\Big)=A^p r^{-p\beta},$$

es decir,

$$(\beta+2)=p\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta=\frac{2}{(p-1)}. \tag{22}$$

Y para que $A>0$, debe ser,

$$\beta^2-(N-2)\beta+\lambda<0$$

que es equivalente a

$$\alpha_-(\lambda)<\beta<\alpha_+(\lambda) \tag{23}$$

donde $\alpha_\pm(\lambda)$ se han definido previamente en (12).
Entonces, dado que se cumple (22),

$$p_-(\lambda)=1+\frac{2}{\alpha_-(\lambda)}\le p<p_+(\lambda)=1+\frac{2}{\alpha_+(\lambda)}. \tag{24}$$

Es decir, es posible hallar una solución radial positiva para (20) con $\lambda\in(0,\Lambda_N)$ fijo, si p verifica (24).

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

Observaciones

$$p_+(\lambda) \longrightarrow \begin{cases} 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2} & \textbf{cuando } \lambda \to \lambda_N \\ \infty & \textbf{cuando } \lambda \to 0, \end{cases}$$

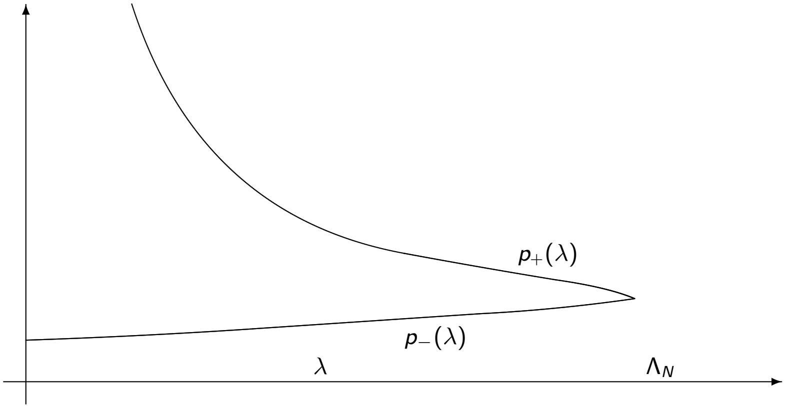
$$p_-(\lambda) \longrightarrow \begin{cases} 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2} & \textbf{cuando } \lambda \to \lambda_N, \\ \frac{N}{N-2} & \textbf{cuando } \lambda \to 0. \end{cases}$$

Además p_+ es decreciente y p_- es creciente, en particular,

$$p_- < 2 * -1 = \frac{N+2}{N-2} < p_+ \textbf{ si } 0 < \lambda < \Lambda_N. \tag{25}$$

$$1 + \frac{2}{\alpha_+(\lambda)} = p_-(\lambda) < p < p_+(\lambda) = 1 + \frac{2}{\alpha_-(\lambda)} \tag{26}$$

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales



Gráficas de los exponentes críticos en función de λ.

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

Observaciones

- **Se observa la continuidad con respecto al caso semilineal con $\lambda = 0$.**
- **El efecto del potencial de Hardy para $\lambda \in (0, \Lambda_N)$ es que se encuentra un intervalo acotados de potencias p para las que se hallan soluciones radiales positivas.**

Integrabilidad local de $\phi(r)$

Como $\beta + 2 < \alpha_+ + 2 < N$, se tiene,

- $\phi(|x|) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$,
- $\dfrac{\phi(|x|)}{|x|^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$
- $\phi^p(|x|) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Conjetura.- $p_+(\lambda)$ es la barrera para obtener soluciones débiles del problema de Dirichlet para la equación (20) in dominios acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tales que $0 \in \Omega$.

Resultados óptimos para problemas elípticos semilineales

Condición suficiente: Existencia

Consideraremos la ecuación,

$$-\Delta u = \frac{\lambda u}{|x|^2} + u^p + f(x), \quad u \geq 0 \textbf{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^N. \tag{27}$$

Suponemos Ω dominio acotado, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f \geq 0$ en Ω.
El concepto de solución débil es el natural para dar sentido a la ecuación en sentido distribucional, es decir:
$u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ tal que $\dfrac{u}{|x|^2} \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ es una super-solution débil (sub-solution débil) si $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, se tiene

$$\int_\Omega (-\Delta\phi) u \, dx \geq (\leq) \int_\Omega u^p + \lambda \frac{u}{|x|^2} + f)\phi \, dx.$$

Si u subsolución y supersolución débil, se dice que u es una solución débil.

Resultados óptimos para problemas elípticos semilineales

De acuerdo con (25) y (26) se clasifican los resultados de existencia en tres casos:

1. $0 \leq \lambda < \Lambda_N$, $p < \dfrac{N+2}{N-2}$.
2. $0 \leq \lambda = \Lambda_N$, $p < p^+ = \dfrac{N+2}{N-2}$.
3. $0 \leq \lambda < \Lambda_N$, $p < p^+$.

Caso 1. El funcional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1},$$

está bien definido en el espacio de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ y sus puntos críticos son soluciones de energía finita del Problema de Dirichet.

- **Si $0 < p < 1$, la geometría del funcional y el teorema de Rellich implican la existencia de un mínimo diferente de cero.**
- **Si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, J_λ tiene la geometría del *paso de montaña*. El Teorema de Ambrosetti-Rabinowitz y el Teorema de Rellich implican que existe un punto crítico de J_λ para el nivel que da el minimax del paso de la montaña.**

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

Caso 2. $0 \leq \lambda = \Lambda_N$, $p < p^+ = \frac{N+2}{N-2}$ **Usando las desigualdades de Hardy con resto, resulta que**

$$||u||^2_{\mathcal{H}} = \int \left(|\nabla u|^2 - \lambda \frac{u^2}{|x|^2} \right) dx,$$

es una norma hilbertiana en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$**.**
Definiendo el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\Omega)$**, complección de** $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ **con tal norma, se tiene la inclusión compacta**

$$\mathcal{H}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ for all } q < 2^*.$$

Entonces se pueden obtener puntos críticos del funcional $J_\lambda(u)$ **en** $\mathcal{H}(\Omega)$**.**

Nota

En general si $\dfrac{2N}{N-2} = p$ **por la identidad de Pohozaev no existe solución de energía finita distinta de la trivial. En efecto, se tiene**

$$N \int_\Omega \frac{1}{p+1} u^{p+1} dx - \frac{(N-2)}{2} \int_\Omega u^{p+1} dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}^2 \langle x, \nu \rangle d\sigma$$

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

Caso 3.- $0 \leq \lambda < \Lambda_N$, $p < p^+$

El problema a estudiar ahora es,

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda u}{|x|^2} + u^p + tf, & \text{in } \Omega \\ u \geq 0, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (28)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ **tal que** $0 \in \Omega$, $0 < \lambda < \Lambda_N$, $t > 0$ **y** $f \in L^\infty(\Omega)$, $f \gneqq 0$.

Teorema

En las hipótesis anteriores si $0 \leq p < p_+(\lambda)$, **existe** $t_0 > 0$ **tal que si** $t_0 > t > 0$ **entonces el problema** (28) **tiene una solución distribucional.**

Nota.

Excluida la solución trivial y estando en general fuera del marco variacional, el método de demostración que se usa es el de Satinger, aprovechando la existencia de supersoluciones radiales.

Resultados óptimos para problemas elipticos semilineales

Para probar la optimalidad se tienen:

Teorema

En las mismas hipótesis del Teorema anterior el conjunto

$$\mathcal{I} = \{t > 0 \,|\, \textbf{el problema } (28) \textbf{ tiene solución}\},$$

es un intervalo acotado.

Teorema

Sea $0 < \lambda \leq \Lambda_N$ y $p \geq p^+(\lambda)$. Supongamos que $u \in L^p(B_R(0) \setminus \{0\})$, $u \geq 0$ satisface

$$-\Delta u - \frac{\lambda}{|x|^2} u \geq u^p, \ \textbf{en } \mathcal{D}'(B_R(0) \setminus \{0\}).$$

entonces $u \equiv 0$.

Además la no existencia es el sentido más fuerte posible.

Teorema

Supongamos que $0 < \lambda \leq \Lambda_N$, $p > 1$ y $t > 0$. Si el problema (28) no tiene solución débil, entonces hay blow-up completo.

Resultados óptimos para problemas elipticos casi-lineales

Se considera el problema de Dirichlet,

$$-\Delta u = |\nabla u|^p + \lambda \frac{u}{|x|^2} + c\,f,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 3,\ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \qquad (29)$$

donde Ω **es un dominio acotado tal que** $0 \in \Omega$, λ, $c > 0$ **y** $f \geq 0$**, con alguna condición extra de integrabilidad.**
Los resultados que se presentan son parte del artículo,

B. Abdellaoui, I. Peral, *The equation* $-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} = |\nabla u|^p + cf(x)$*: the optimal power.* **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6, no. 1 (2007), 159–183.**

Este tipo de ecuaciones aparece en varios contextos. Por ejemplo,

- **Si** $p = 2$, **y** $\lambda = 0$, **el problema** (29) **es la parte estacionaria del modelo de crecimiento de Kardar-Parisi-Zhang y de algumos modelos de propagación de llamas.**
- **La ecuación** (29) **puede verse como la ecuación de Hamilton-Jacobi**

$$|\nabla u|^p + \lambda \frac{u}{|x|^2} + c\,f = 0$$

con el término de viscosidad que introduce el Laplaciano.

Resultados óptimos para problemas elipticos casi-lineales

EXPONENTE CRÍTICO. **Como en el caso semilineal se buscan soluciones radiales del problema en todo el espacio.**
Buscamos soluciones positivas de la forma $u(x) = A|x|^{-\beta}$**; por cálculo directo**

$$\beta = \frac{2-p}{p-1} \qquad \text{and} \qquad \beta^p A^{p-1} = \beta(N-\beta-2) - \lambda. \tag{30}$$

el segundo término es positivo si y solo si

$$\alpha_-(\lambda) < \beta < \alpha_+(\lambda) \text{ donde } \alpha_{(\pm)}(\lambda) \text{ están definidas por } (12).$$

Como se verifica (30)**, entonces** $\alpha_-(\lambda) < \beta < \alpha_+(\lambda)$ **es equivalente a**

$$q_-(\lambda) \equiv \frac{2+\alpha_+(\lambda)}{\alpha_+(\lambda)+1} < p < \frac{2+\alpha_-(\lambda)}{\alpha_-(\lambda)+1} \equiv q_+(\lambda). \tag{31}$$

Luego el candidato a exponente crítico es $q_+(\lambda)$**.**
La demostración que $q_+(\lambda)$ **es crítico, requiere sutiles argumentos de comparación, estimaciones a priori y resultados de compacidad.**

Resultados óptimos para problemas elipticos casi-lineales

El resultado principal de no existencia es el siguiente.

Teorema.

Sea $f \geq 0$. Sea $q_+(\lambda) = \frac{2+\alpha_-(\lambda)}{1+\alpha_-(\lambda)}$, donde $\alpha_-(\lambda)$ definida en (12). Si $p \geq q_+(\lambda)$, entonces la equacion (29) no tiene supersoluciones distribucionales positivas . Si $f \equiv 0$, la única super-solución débil es $u \equiv 0$.

Idea de la demostración en el caso $p > q_+(\lambda)$. **Se argumenta por contradicción: Si la ecuación (29) tiene una supersolución débil u, entonces**

$$-\Delta u - \lambda \frac{u}{|x|^2} \gneq 0.$$

Por comparación existe C tal que

$$u(x) \geq C|x|^{-\alpha_-(\lambda)} \text{ si } x \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$$

Sea $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_r(0))$, y consideremos como función test $|\phi|^{p'}$ en (29). Por las desigualdades de Hölder y Young y la estimación inferior de u,

$$c_2\lambda \int_{B_r(0)} \frac{|\phi|^{p'}}{|x|^{2+\alpha_-(\lambda)}} dx \leq c_1\lambda \int_{B_r(0)} \frac{u|\phi|^{p'}}{|x|^2} dx \leq \int_{B_r(0)} |\nabla \phi|^{p'} dx$$

Como $p > q_+(\lambda)$, se obtiene $2 + \alpha_-(\lambda) > p'$.

Contradicción con la desigualdad de Hardy en $W_0^{1,p'}(B_r(0))$.

Resultados óptimos para problemas elipticos casi-lineales

El caso $p = q_+(\lambda)$ es especialmente técnico y difícil.

Se obtiene también el siguiente resultado de blow-up completo.

Teorema

Sea $p \geq q_+(\lambda)$. **Si** $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ **es una solución del problema**

$$\begin{cases} -\Delta u_n & = & |\nabla u_n|^p + \lambda a_n(x) u_n + \alpha f \text{ en } \Omega, \\ u_n & > & 0 \text{ en } \Omega, \\ u_n & = & 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f \geq 0$, $f \neq 0$ **y** $a_n(x) = \frac{1}{|x|^2 + \frac{1}{n}}$, **entonces** $u_n(x_0) \to \infty$, **para todo** $x_0 \in \Omega$.

La suficiencia del exponente $q_+(\lambda)$ resulta del siguiente resultado.

Teorema

Sea $1 < p < q_+(\lambda)$ **donde como antes,** $q_+(\lambda) = \frac{2+\alpha_-(\lambda)}{1+\alpha_-(\lambda)}$. **Existe** c_0 **tal que si** $c < c_0$ **y** $f(x) \leq \frac{1}{|x|^2}$, **entonces existe** u **solución débil del problema**

$$\begin{cases} -\Delta u & = & |\nabla u|^p + \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + c\, f \text{ en } \Omega, \\ w & = & 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

Comportamiento de los problemas parabólicos

- **Un trabajo pionero estudiando la influencia del potencial de Hardy en la ecuación del calor, es el siguiente:**

  P. Baras, J.A. Goldstein, *The heat equation with a singular potential.* **Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 1, 121–139.**

- **La extensión a problemas parabolicos lineales de la integrabilidad óptima es obtenida en el artículo,**

  M.M. Porzio, A. Primo, Summability and existence results for quasilinear parabolic equations with Hardy potential term. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 20 (2013), no. 1, 65-100

Para los problemas parabólicos no lineales se tienen los mismos exponentes críticos que en el caso elíptico, es decir,

- **En el caso semilineal** $p_+(\lambda) = 1 + \frac{2}{\alpha_+(\lambda)}$
- **En el caso casilineal** $q_+(\lambda) = \frac{2+\alpha_-(\lambda)}{1+\alpha_-(\lambda)}$

Comportamiento de los problemas parabólicos

Las referencias para los problemas

$$u_t - \Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + u^p + f \qquad \textbf{(Semilineal),}$$
$$u_t - \Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2} + |\nabla u|^q + f \qquad \textbf{(Casilineal,)}$$

son respectivamente los artículos,

B. Abdellaoui-I. Peral-A. Primo, *Influence of the Hardy potential in a semilinear heat equation*, **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A Mathematics, Volume 139, (2009), 5, 897-926.**

B. Abdellaoui-I. Peral-A. Primo, *Optimal results for parabolic problems arising in some physical models with natural growth in the gradient respect to a Hardy potential*, **Advances in Mathematics, 225 (2010) 2967-3021.**

Las demostraciones son más complicadas, especialmente en el caso casilineal.

En los artículos anteriores, además, se analiza como el potencial de Hardy modifica el llamado *exponente de Fujita* en el problema semilineal en $\mathbb{R}^N$ (y como hace aparecer un tal *exponente de Fujita* en el caso casilineal).

Otros resultados

Problemas con difusión no lineal. **Como modelo de difusión no lineal se ha tomado el llamado p-Laplaciano, es decir,**

$$\Delta_p u \equiv \mathbf{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad 1 < p < N.$$

Se ha estudiado la ecuación,

$$u_t - \Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + f$$

y la correspondiente estacionaria. Las referencias iniciales en este contexto son

J. Garcia Azorero, I. Peral, *Hardy Inequalities and some Critical Elliptic and Parabolic problems* **Jou. Diff. Equations, 144 (1998), no 2, pg 441-476.**

J.A. Aguilar, I. Peral, *Global behaviour of the Cauchy Problem for some Critical Nonlinear Parabolic Equations*, **SIAM Journal in Mathematical Analysis, 31 (2000), no. 6, 1270-1294.**

Después hay cientos de referencias en este tema.

Otros resultados

Algunos problemas no locales. **Se ha estudiado el caso del potencial de Hardy fraccionario, asociado (por homogeneidad) al Laplaciano fraccionario:**

Definición 1. *(Multiplicador)*

Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ **y** $s \in (0,1)$ **el** *Laplaciano fraccionario* **de** u **se define por**

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u),\ \xi \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\mathcal{F}$ **es la transformada de Fourier clásica.**

Una definición equivalente es la siguiente.

Definición 2. *(Núcleo)*

$$(-\Delta)^s u(x) := a_{N,s}\,\mathbf{p.v.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,dy,$$

donde

$$a_{N,s} = 2^{2s-1}\pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{|\Gamma(-s)|}.$$

Otros resultados

Desigualdad de Hardy no local

Para toda $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ **se verifica**

$$\Lambda_{N,s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^{2s}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} \mathcal{F}^2(u) d\xi,$$

con

$$\Lambda_{N,s} := 2^{2s} \frac{\Gamma^2\left(\frac{N+2s}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{N-2s}{4}\right)}.$$

$\Lambda_{N,s}$ **es óptima y no se alcanza.**

De forma equivalente,

$$\Lambda_{N,s} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^{2s}} dx \leq \frac{a_{N,s}}{2} \iint_{Q} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \ u \in H_0^s(\Omega).$$

Otros resultados

La mejor costante fue obtenida por,

I. W. HERBST, **Spectral theory of the operator $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$, Commun. Math. Phys. 53 (1977), 285-294.**

Puede verse también,

W. BECKNER, *Pitt's inequality and the uncertainty principle*, **Proceedings of the American Mathematical Society, 123, (1995) no. 6, 1897-1905.**

E. H. LIEB *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities,* **Annals of Mathematics, 118 (1983), 349-374.**

D. YAFAEV, *Sharp constants in the Hardy-Rellich inequalities*, **J. Funct. Anal. 168 (1999) no. 1, 121-144.**

La desigualdad de Hardy no local está motivada, por ejemplo, por el estudio de la estabilidad de la materia relativista obtenida en un contexto muy general en el magnifico artículo,

R. FRANK, E. H. LIEB, R. SEIRINGER, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators*, **Journal of the American Mathematical Society (2008), Vol. 20, No. 4, 925-950.**

Otros resultados

Referencias para el análisis de la influencia del potencial de Hardy en problemas para el laplaciano fraccionario o la ecuación del calor fraccionaria son las siguientes:

B. Barrios, M. Medina, I. Peral, *Some remarks on the solvability of non local elliptic problems with the Hardy potential.* **Commun. Contemp. Math. 16 (2014), no. 4, 1350046, 29 pp. DOI: 10.1142/S0219199713500466**

B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *Optimal results for the fractional heat equation involving the Hardy potential*, **submitted, preprint arXiv:1412.8159.**

B. Abdellaoui, M. Medina, I. Peral, A. Primo, *The effect of the Hardy potential in some Calderón-Zygmund properties for the fractional Laplacian*, **submitted preprint arXiv:1510.08604.**

Muchas gracias por la atención!

Fin