

LA MÚSICA Y EL ANÁLISIS DE FOURIER

J. M. Ansemil



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Facultad de CC. Matemáticas

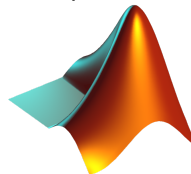
Universidad de Murcia

18 de Abril de 2013

Esta será una charla (de **divulgación**) en la que usaremos:

Esta será una charla (de **divulgación**) en la que usaremos:

Un programa informático: *MATLAB*®,

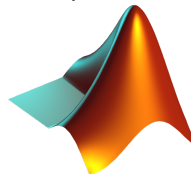


Introducción

Esta será una charla (de **divulgación**) en la que usaremos:

Un programa informático: *MATLAB*®,

y un instrumento, la *Guitarra Española*.



En el s. XVI, tenía **4** cuerdas, en el s. XVII, **5** y desde el s. XVIII tiene **6**, y se llama *guitarra española*. Hay algunos casos excepcionales:

Introducción

En el s. XVI, tenía **4** cuerdas, en el s. XVII, **5** y desde el s. XVIII tiene **6**, y se llama *guitarra española*. Hay algunos casos excepcionales:

Guitarras de Yepes y de Pat Metheny:



Estudios en la Edad Media:

Estudios en la Edad Media: *Trivium* { Gramática
Dialéctica
Retórica

Estudios en la Edad Media: *Trivium* { Gramática
Dialéctica
Retórica

Quadrivium { Aritmética: Estudio del número en estado puro
Geometría: Estudio del espacio en estado puro
Música: Estudio del número en movimiento
Astronomía: Estudio del espacio en movimiento.

Algunas frases célebres

-La música es para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo. Platón (427–347a.C.), filósofo griego.

Algunas frases célebres

-La música es para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo. Platón (427–347a.C.), filósofo griego.

-La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando. Leibniz (1646–1716), matemático alemán.

Algunas frases célebres

-La música es para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo. Platón (427–347a.C.), filósofo griego.

-La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando. Leibniz (1646–1716), matemático alemán.

-No basta con oír la música; además, hay que verla. Stravinsky (1882–1971), compositor y director de orquesta ruso.

Nosotros aquí “veremos”, de alguna manera la música

Algunas frases célebres

-La música es para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo. Platón (427–347a.C.), filósofo griego.

-La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando. Leibniz (1646–1716), matemático alemán.

-No basta con oír la música; además, hay que verla. Stravinsky (1882–1971), compositor y director de orquesta ruso.

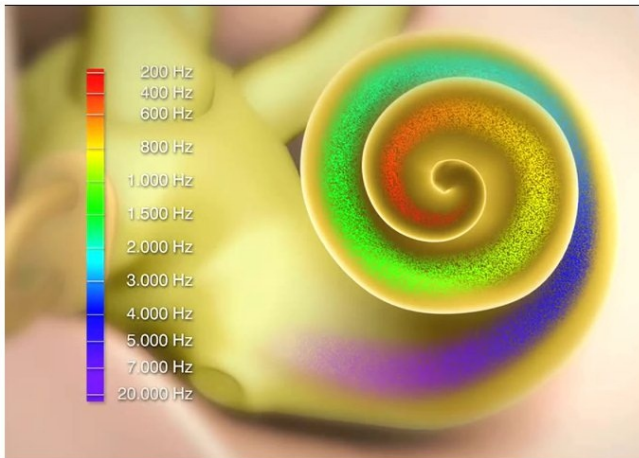
Nosotros aquí “veremos”, de alguna manera la música

-Sin música para decorarlo, el tiempo no es más que una serie de plazos límite o de fechas en las que pagar facturas. Frank Zappa, guitarrista y compositor (1940-1993).

Funcionamiento de nuestro oído.

www.youtube.com/watch?v=PuC1BDFUq2I&feature=related

El oído humano



Las cuerdas de la guitarra

Las cuerdas de una guitarra:

La sexta cuerda	330Hz
La quinta cuerda	440Hz
La cuarta cuerda	587Hz
La tercera cuerda	784Hz
La segunda cuerda	988Hz
La primera cuerda	1318Hz

Las cuerdas de la guitarra

Según pasamos de la

$$6^a \rightarrow 5^a \rightarrow 4^a \rightarrow 3^a \rightarrow 2^a \rightarrow 1^a$$

esos valores aumentan, los sonidos son cada vez más agudos.

Las cuerdas de la guitarra

Según pasamos de la

$$6^a \rightarrow 5^a \rightarrow 4^a \rightarrow 3^a \rightarrow 2^a \rightarrow 1^a$$

esos valores aumentan, los sonidos son cada vez más agudos.

La frecuencia más alta que emite una guitarra es de 2.637Hz , la del piano es de 4.186Hz .

Las cuerdas de la guitarra

Según pasamos de la

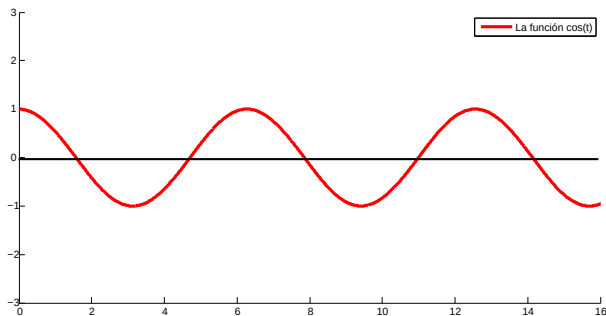
$$6^a \rightarrow 5^a \rightarrow 4^a \rightarrow 3^a \rightarrow 2^a \rightarrow 1^a$$

esos valores aumentan, los sonidos son cada vez más agudos.

La frecuencia más alta que emite una guitarra es de 2.637Hz , la del piano es de 4.186Hz .

 1000Hz  4000Hz

Consideremos la función *coseno*



Un poco de matemáticas

A partir de ella:

A partir de ella:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \quad t \in \mathbb{R}$$

$A > 0$, la **amplitud**,

$\omega > 0$, el **pulso** y

φ es un número real, la **fase**.

Un poco de matemáticas

Supongamos $\omega = 1$ y $\varphi = 0$, $s(t) = A \cos(t)$.

Valores entre $-A$ y A .

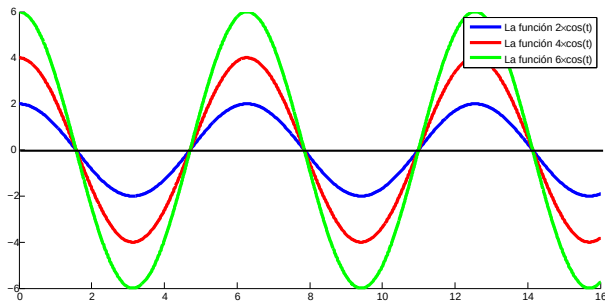
Para $A = 2$, $A = 4$ y $A = 6$:

Un poco de matemáticas

Supongamos $\omega = 1$ y $\varphi = 0$, $s(t) = A \cos(t)$.

Valores entre $-A$ y A .

Para $A = 2$, $A = 4$ y $A = 6$:

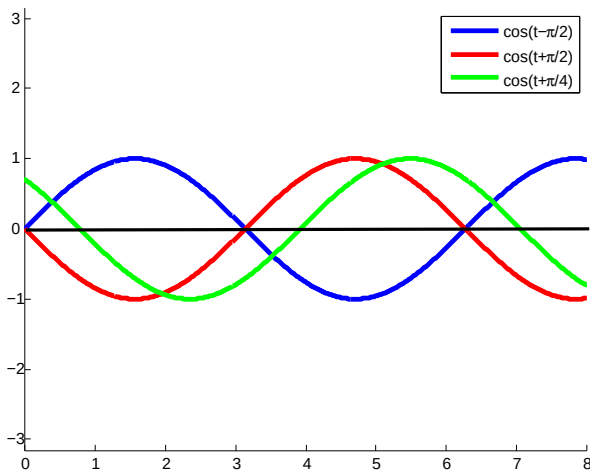


Un poco de matemáticas

Si $A = 1$ y $\omega = 1$; al variar φ desplazamiento de un lado o a otro, según el signo de φ . Gráficas para $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Un poco de matemáticas

Si $A = 1$ y $\omega = 1$; al variar φ desplazamiento de un lado o a otro, según el signo de φ . Gráficas para $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

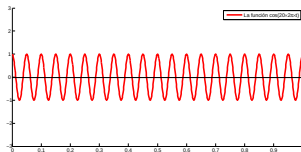
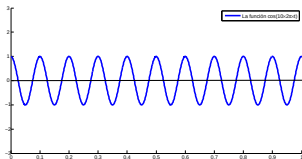


Un poco de matemáticas

ω determina el número de ciclos. Veamos la gráfica para $\omega = 10 \times 2\pi$
y $\omega = 20 \times 2\pi$:

Un poco de matemáticas

ω determina el número de ciclos. Veamos la gráfica para $\omega = 10 \times 2\pi$ y $\omega = 20 \times 2\pi$:



Primer caso, 10 ciclos

Segundo caso, 20.

1 Hz = un ciclo por segundo.

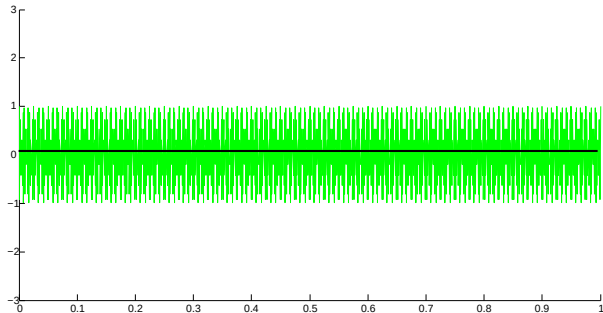
Oído humano: $20Hz \rightsquigarrow 20.000Hz$.

Un poco de MATLAB

Señal generada con MATLAB:

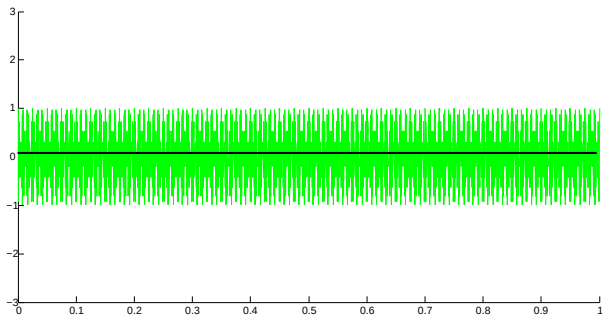
Un poco de MATLAB

Señal generada con MATLAB:



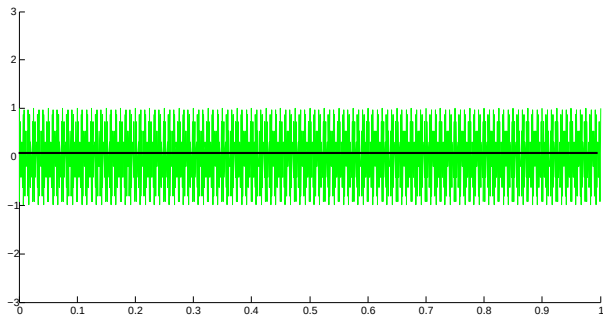
Un poco de MATLAB

Señal generada con MATLAB:



¿Qué frecuencia tiene esa señal?

Señal generada con MATLAB:



¿Qué frecuencia tiene esa señal?

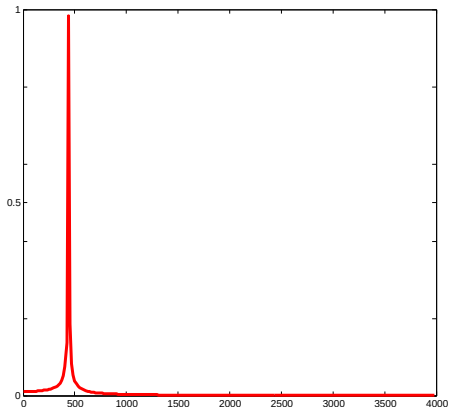
¿Habr  alguna herramienta matemática que me d  la respuesta?

Un poco de MATLAB

La `fft`, que es el acrónimo de *Fast Fourier Transform*

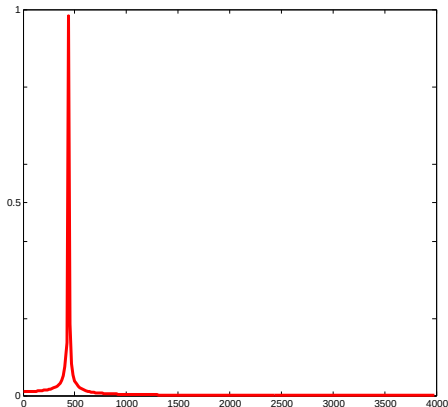
Un poco de MATLAB

La `fft`, que es el acrónimo de *Fast Fourier Transform*



Un poco de MATLAB

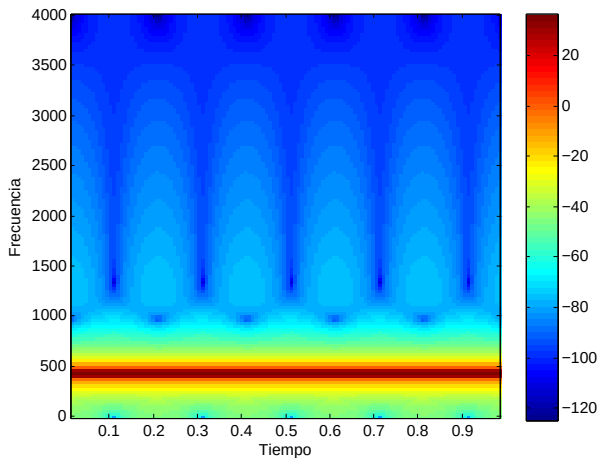
La `fft`, que es el acrónimo de *Fast Fourier Transform*



El pico está precisamente en 440Hz , ésa es la frecuencia de la señal.

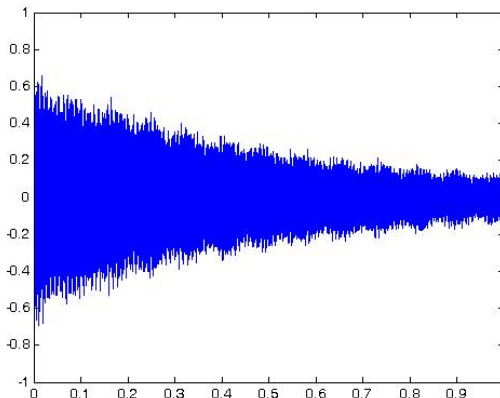
Un poco de MATLAB

Lo que sigue es lo que se llama “el espectrograma” de la señal.



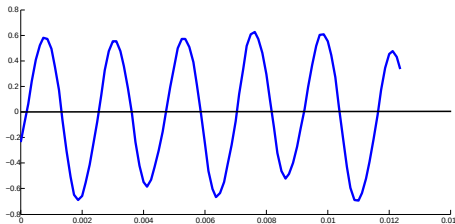
Un poco de MATLAB

Señal de la 5ª cuerda de la guitarra:



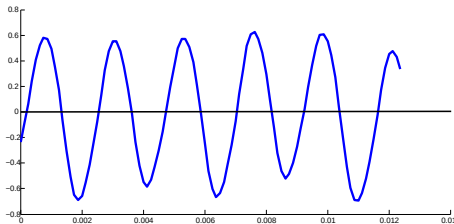
Un poco de MATLAB

Con un zoom vemos la primera centésima de segundo

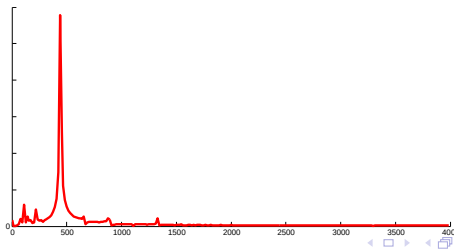


Un poco de MATLAB

Con un zoom vemos la primera centésima de segundo

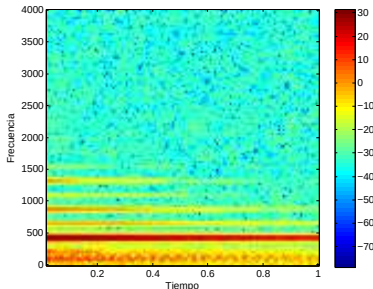


Ahora su frecuencia, $\text{fft}(\text{LaGuitarra})$:



Un poco de MATLAB

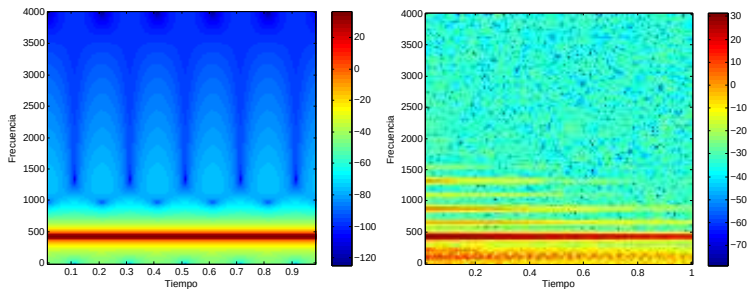
Mostramos ahora el espectrograma de la señal de la guitarra:



Vemos:

- La, 440Hz,
- su quinta: Mi, 660Hz
- su primer armónico 880Hz,
- su tercera: Do, 1046Hz (primer armónico de Do)
- un tercer armónico de La, 1320Hz.

Comparemos ahora los espectrogramas:



Un poco de matemáticas

La *Transformada de Fourier*: Dada una función f continua definida en la recta real $\mathbb{R}$, con ciertas propiedades, se define su Transformada de Fourier $\hat{f}$ como la función dada por:

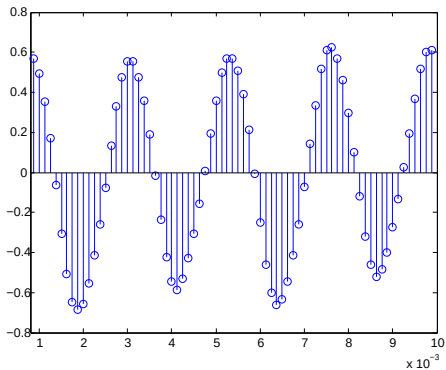
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\pi\omega t} dt$$



Fourier (1768-1830)

Un poco de matemáticas

Para señales discretas:



DFT (*Discrete Fourier Transform*)

Para señales finitas de N valores, se define la DFT por la fórmula:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}$$

Para señales finitas de N valores, se define la DFT por la fórmula:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}$$

Para calcular estos $\hat{x}[n]$ hay que hacer $(N-1)^2$ multiplicaciones y $N(N-1)$ sumas de números complejos.

Para señales finitas de N valores, se define la DFT por la fórmula:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}$$

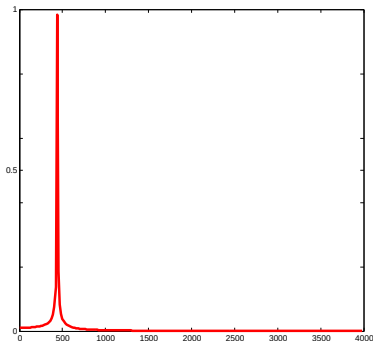
Para calcular estos $\hat{x}[n]$ hay que hacer $(N-1)^2$ multiplicaciones y $N(N-1)$ sumas de números complejos.

Si $N = 1024 \rightsquigarrow 1.046.529$ multiplicaciones y 1.047.552 sumas.

En 1965 Cooley y Tuckey inventaron un algoritmo para el cálculo de esos coeficientes mucho más económico, la FFT (*Fast Fourier Transform*). $N=1024 \rightsquigarrow 4.097$ multiplicaciones y 10.420 sumas. MATLAB la implementa mediante la función `fft`.

Un poco de matemáticas

$\text{fft}(\cos(2\pi 440t))$



Propiedades de la `fft`: es lineal y tiene inversa, que suele denotarse por `ifft`. Esto es realmente útil, para tratar las señales musicales. Veremos esto un poco más adelante.

Un poco de música

En la llamada *música occidental* se usa la llamada *Escala Pitagórica* que está formada por 7 notas:

Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Si.

Con notación anglosajona: *C, D, E, F, G, A y B.*

¿Pero qué son estas notas desde el punto de vista de las señales matemáticas que estamos considerando?

Un poco de música

En la llamada *música occidental* se usa la llamada *Escala Pitagórica* que está formada por 7 notas:

Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Si.

Con notación anglosajona: *C, D, E, F, G, A y B.*

¿Pero qué son estas notas desde el punto de vista de las señales matemáticas que estamos considerando?

Definición: Se llama *La* a la señal sinusoidal cuya frecuencia es 440Hz .

Un poco de música

En la llamada *música occidental* se usa la llamada *Escala Pitagórica* que está formada por 7 notas:

Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Si.

Con notación anglosajona: *C, D, E, F, G, A y B.*

¿Pero qué son estas notas desde el punto de vista de las señales matemáticas que estamos considerando?

Definición: Se llama *La* a la señal sinusoidal cuya frecuencia es 440Hz .

Goebbels (ministro de Hitler, 1939): $432 \rightsquigarrow 440$ por decreto...

(<http://maestroviejo.wordpress.com/2012/05/11/cuando-y-por-que-nos-cambiaron-la-frecuencia-432Hz-por-440Hz/>).

Un poco de música

Fue Pitágoras (580-495 a.C.) quien observó que si una cuerda tensa vibra a una frecuencia, digamos 440Hz , la mitad de esa cuerda vibra al doble de esa frecuencia: 880Hz .



Un poco de música

Los pitagóricos consideraban que en la música existen 3 medias: la **aritmética**, la **geométrica** y la **armónica** y a partir de ellas generaban la escala, la llamada escala pitagórica.

Un poco de música

Los pitagóricos consideraban que en la música existen 3 medias: la **aritmética**, la **geométrica** y la **armónica** y a partir de ellas generaban la escala, la llamada escala pitagórica.

J. S. Bach (1685-1750)



con su obra “El clave bien temperado” probó la eficiencia de una escala “ bien temperada”.

Ésta se puede construir así:

Se divide el intervalo [440, 880] en 12 partes “iguales”, iguales desde el punto de vista logarítmico, pues es así como los percibe el oído: La ley de Weber-Fechner dice que:

$$dp = k \frac{dS}{S}$$

Donde dp corresponde al cambio percibido en el estímulo, dS corresponde al cambio de magnitud del estímulo y S corresponde a la magnitud del estímulo.

Un poco de matemáticas

Se divide el intervalo $[440, 880]$ en 12 partes “iguales”, iguales desde el punto de vista logarítmico, pues es así como los percibe el oído: La ley de Weber-Fechner dice que:

$$dp = k \frac{dS}{S}$$

Donde dp corresponde al cambio percibido en el estímulo, dS corresponde al cambio de magnitud del estímulo y S corresponde a la magnitud del estímulo.

Integrando la ecuación anterior, se tiene:

$$p = k \ln S + C$$

C es la constante de integración. Para determinar el valor de C , se asigna a p el valor 0 cuando S es el umbral de percepción S_0 , y entonces:

$$C = -k \ln S_0.$$

En consecuencia

$$p = k \cdot \ln \left(\frac{S}{S_0} \right).$$

C es la constante de integración. Para determinar el valor de C , se asigna a p el valor 0 cuando S es el umbral de percepción S_0 , y entonces:

$$C = -k \ln S_0.$$

En consecuencia

$$p = k \cdot \ln \left(\frac{S}{S_0} \right).$$

Nótese que la percepción de una señal de frecuencia $\lambda^2 S_0$ es el doble que la de una señal de frecuencia λS_0 .

Las 12 partes en las que dividimos el intervalo $[440, 880]$ generan intervalos de forma que los cocientes entre sus extremos (no sus diferencias) dan siempre lo mismo. Para obtener eso tenemos que multiplicar 440 por un número λ tal que

$$440\lambda^{12} = 880 = 2 \times 440$$

esto es, $\lambda = \sqrt[12]{2}$ que es aproximadamente 1,05946. Así las correspondientes frecuencias (despreciando decimales) son:

440, 466, 494, 523, 554, 587, 622, 660, 698, 740, 784, 831, 880.

Se define:

- $Si = 494Hz$,
- $Do = 523Hz$,
- $Re = 586Hz$,
- $Mi = 660Hz$,
- $Fa = 698Hz$, y
- $Sol = 784Hz$.

Los valores que no hemos considerado se corresponden con:

$La\# = 466$, $Do\# = 554$, $Re\# = 622$, $Fa\# = 740$ y $Sol\# = 831$.

Un poco de música

Diferencia entre la separación de las frecuencias. Los pares de notas *La – Si*, *Do – Re*, *Re – Mi* y *Fa – Sol* están separadas por lo que se llama **un tono** mientras que los pares de notas *Si – Do* y *Mi – Fa* lo están por lo que se llama **un semitono**.

Un poco de música

Diferencia entre la separación de las frecuencias. Los pares de notas *La – Si*, *Do – Re*, *Re – Mi* y *Fa – Sol* están separadas por lo que se llama **un tono** mientras que los pares de notas *Si – Do* y *Mi – Fa* lo están por lo que se llama **un semitono**.

Las escalas mayores de la música que escuchamos habitualmente siempre responden a la relación $T - T - S - T - T - T - S$.

Un poco de música

Diferencia entre la separación de las frecuencias. Los pares de notas *La – Si*, *Do – Re*, *Re – Mi* y *Fa – Sol* están separadas por lo que se llama **un tono** mientras que los pares de notas *Si – Do* y *Mi – Fa* lo están por lo que se llama **un semitono**.

Las escalas mayores de la música que escuchamos habitualmente siempre responden a la relación $T - T - S - T - T - T - S$.

Las menores siguen el esquema $T - S - T - T - S - T - T$.

Desde luego, otras culturas usan otros tipos de escalas.

Artículo estupendo de Marco Castrillón y Manuel Domínguez sobre la construcción de Escalas Musicales. Gaceta RSME, vol. 15, no. 1, 2013.

Pasemos a la práctica...