TEMA 1

1. Resolver los siguientes SEL:

$$[1]\left\{\begin{array}{l} 2x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3=2 \end{array}\right. \qquad [2]\left\{\begin{array}{l} x_1+x_3-x_4=5 \\ x_2+x_3+x_4=2 \end{array}\right.$$

$$[3]\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=2 \end{array}\right. \qquad [4]\left\{\begin{array}{l} ax_1+\,bx_2+\,cx_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_3=1 \end{array}\right.$$

2. Calcular el rango de las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

3. Multiplicar las siguientes matrices, en el orden en que sea posible:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y calcular la inversa Q^{-1} de la matriz

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Hallar matrices X, Y tales que

$$(X)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}(Y)$$

¿Hay solución única? ¿La habría si los números fuesen otros?

(La respuesta a estas preguntas para X no es igual que para Y).

5. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. ¿Para qué valores del parametro λ se anula el siguiente determinante?

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

7. Escribir la ecuación paramétrica de la recta $2x_1 + 3x_2 = 1$, y la ecuación implícita de la recta
$$\begin{cases} x_1 = 3 - t \\ x_2 = -1 + 2t \end{cases}$$
¿Tienen estas rectas algún punto en común? En caso afirmativo, hallarlo.

8. La ecuación $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$ es la de un plano en el espacio.
Hay tres soluciones muy sencillas que se pueden hallar a ojo. Represéntalas en un sistema de ejes coordenados. Uniendo los tres puntos para formar un triángulo se puede visualizar el plano.

9. Escribir la ecuación implícita del plano
$$\begin{cases} x_1 = -1 + 2t + 3s \\ x_2 = \quad\quad -t + s \\ x_3 = \ 2 + t \end{cases}$$
Determinar el vector director de la recta que viene dada como la intersección de dicho plano con el plano $x_2 + x_3 = 0$.

10. Considerar las dos rectas del espacio tridimensional dadas respectivamente por:
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$
Determinar si se cortan.

11. Probar que todo polinomio de grado 2, $p(x) = x^2 + bx + c$, tiene como máximo dos raíces reales.
IDEA: suponer que tiene tres raíces distintas x_1, x_2, x_3 , escribir esa afirmación como un SEL en las incógnitas b y c , y probar que no tiene soluciones.

<u>TEMA 2</u>

1. Hallar la longitud de los lados, los cosenos de los ángulos, y el área del triángulo cuyos vértices son:
$$P_1 = (2, 1),\ P_2 = (4, -2),\ P_3 = (5, 3)$$

2. Los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de los dos puntos $P = (0, 1)$ y $Q = (2, 3)$, forman una recta que se llama mediatriz del segmento PQ. Dar la ecuación de esa recta.

3. Hallar para qué valores de α forma el vector $(\cos\alpha\ ,\ \operatorname{sen}\alpha)$ un ángulo de 30^o con el vector $(1, 2)$.

4. Dada la recta $2x_1 - 5x_2 = 1$, hallar su vector director. Determinar la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto $(3, -1)$.

5. Determinar el plano que pasa por los puntos $(2,1,0)$, $(-1,0,3)$ y $(1,1,2)$. Hallar la recta perpendicular a dicho plano trazada desde el origen de coordenadas.

6. Calcular la distancia del punto $P=(-4,1,-5)$ a la recta dada por:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{array}\right.$$

7. Hallar la distancia entre las rectas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Determinar si son linealmente independientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$, y dar una base del subespacio que generan:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Dar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores solución de:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right.$$

10. ¿Para qué valores de λ, son los vectores siguientes una base de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TEMA 3

1. Dar la composición de las dos transformaciones lineales siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} z_1 = -2y_1 + y_2 \\ z_2 = -y_1 - y_2 \end{array}\right.$$

2. Determinar las ecuaciones de la simetría con respecto a la recta $x_1+x_2=0$. ¿Cuál es la simétrica de la recta $x_1 - x_2 = 0$?

3. Hallar las ecuaciones de la proyección sobre el plano $x_2 + x_3 = 0$ en el espacio, y dar sus autovalores y autovectores.

4. Hallar los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Dar la potencia n-ésima de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.24 \\ -0.16 & 0.98 \end{pmatrix}$$

   Dado el punto $X_0 = (4,3)$, dibujar varios de los puntos $X_{n+1} = B\,X_n$.

6. Dar las ecuaciones de los giros en el plano con centro $(3,4)$ y ángulo $\pm 45^o$.

7. Dar las ecuaciones de la homotecia con centro $(-1,-2)$ y razón -2 y las de la traslación de vector $(1,1)$. Hallar la composición de la homotecia con la traslación; sale de nuevo una homotecia, ¿cuál es su centro?

8. Dar las ecuaciones de las simetrías S_1 y S_2 con respecto a las rectas $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ respectivamente. Escribir la ecuación de la composición de S_1 con S_2 e identificar qué tipo de transformación es.

9. Dar las ecuaciones de las simetrías en el espacio S_1 y S_2 con respecto a los planos $x_2 = 2$ y $x_3 = 0$. Escribir la ecuación de la composición de S_1 con S_2.

10. Hallar las ecuaciones del giro de 45^o cuyo eje es la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$