

TEMA 4

1. Suponiendo que de un material radioactivo se descompone el 90% en 300 años, calcula su vida media.
¿Qué porcentaje del material inicial tenemos al cabo de 400 años?
2. El tiempo de vida media del C_{14} es de $5.8 \cdot 10^3$ años.
En un fósil se encuentra una cantidad de C_{14} que es un 1% de la cantidad que se encuentra en un ser vivo. Data el fósil.
3. En el curso de un río hay 3 pequeñas lagunas. Cada una vierte cada hora un 10% de su contenido sobre la siguiente, y la última, río abajo. Se acaba de verter una cantidad de sustancia tóxica en la primera laguna.
Formula el sistema dinámico correspondiente.
4. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30% de los árboles de tamaño menor, que pasan al tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10% de árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay a los 20 años?
5. Una balsa de lodo tóxico, de volumen constante, se comunica por filtración con un curso de agua cercano; se filtra un 5% cada hora. Una depuradora que opera en la balsa limpia cada hora un 10% del material tóxico que queda allí. ¿Cuánto de ese material llegará a pasar al río?
6. Se tienen dos tanques de agua con NaCl disuelto de 100 litros cada uno. Se bombea 1 l/min de agua del primero al segundo y 2 l/min del segundo al primero. A su vez se deja salir 1 l/min del agua del segundo tanque y se echa agua limpia a razón de 2 l/min en el primer tanque.
Las concentraciones de sal, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, eran inicialmente $x_1(0) = 1 \text{ gr/l}$, $x_2(0) = 10 \text{ gr/l}$. Halla su evolución.

TEMA 5

1. Resuelve los siguientes SED, con las condiciones iniciales dadas:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$$

2. Reformula con un SED los Ejercicios del Tema 4 que lo permitan.

3. Modelo competitivo.

Dos especies compiten en un territorio. La presencia de una disminuye la tasa de crecimiento de la otra y viceversa.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Halla $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sabiendo que inicialmente $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 150$.
¿Desaparece alguna de las dos especies?

4. Modelo depredador-presa.

La abundancia del depredador daña la tasa de crecimiento de la presa.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Halla $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sabiendo que inicialmente $x_1(0) = 500$ y $x_2(0) = 100$.
¿Cuándo desaparece la presa? Comprueba que cualquiera que sean las cantidades iniciales, la presa desaparece antes de 1 año.

5. Modelo simbiótico.

Dos especies cooperan. La tasa de crecimiento de cada una mejora con la presencia de la otra pero sufre con la abundancia de ella misma.

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Halla $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sabiendo que inicialmente $x_1(0) = 200$ y $x_2(0) = 500$.
¿Desaparece alguna de las dos especies?

6. Modelo depredador-presa. Resuelve el modelo

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

¿Cuál es el depredador y cuál la presa?

Halla $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para $x_1(0) = 1000$ y $x_2(0) = 1000$.

7. En la ecuación diferencial de segundo orden $x'' + bx' + cx = 0$, pon $x_1 = x$, $x_2 = x'$ para transformarla en un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Resuelve por este método las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} (a) & x'' + 5x' + 6x = 0, & x(0) = 1, x'(0) = 0 \\ (b) & x'' + 6x' + 9x = 0, & x(0) = 1, x'(0) = 2 \\ (c) & x'' + 4x = 0, & x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{array}$$

8. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + \cos t + e^{2t} \\ x_2' = -2x_1 - e^{2t} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$