Hoja 1: Números reales y principio de inducción

1.- Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $|6x+5|<1$,

(ii) $|x+1|\leq |x-1|$,

(iii) $x^3-2x^2+2<x$,

(iv) $|x^2-8|\leq 1$,

(v) $\frac{x^2-2}{x^2+2}<0$,

(vi) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}>0$,

(vii) $|(x+2)(x+3)|<1$,

(viii) $|x+1|+|x+2|>1$.

2.- Demostrar las siguientes desigualdades para todo $x,y\in\mathbb{R}$:

(i) $|x-y|\leq |x|+|y|$

(ii) $||x|-|y||\leq |x-y|$.

(iii) Si $x,y>0$, entonces $\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

(iv) Si $x,y>0$, entonces $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}$.

(v) Si $x,y>0$, entonces $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$.

3.- Demostrar por inducción

(i) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$

(iii) $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$

(iv) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

(v) $1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot(k!)=n!$, para todo $n\geq 2$;

(vi) $n!\leq n^n$

(vii) $n!\geq 2^n$, para todo $n\geq 4$;

(viii) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1+x)^n\geq 1+nx$, para todo $x\geq -1$, $n\geq 1$;

(ix) $2^{2n}+15n-1$ es múltiplo de 9 para todo $n\in\mathbb{N}$.

4.- Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es un múltiplo de 9.

5.- (i) Utilizando la definición de número combinatorio $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para números naturales $0\leq k\leq n$, demostrar que

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}.$$

(ii) *Fórmula del binomio de Newton:* demostrar que para todo $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ se cumple

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

6.- *Fórmula de sumación de una progresión geométrica:* demostrar por inducción sobre n que para todo número real $r \neq 1$ se tiene

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

7.- Demostrar que

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \text{y} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Derivar una fórmula para $\max\{x, y, z\}$ y $\min\{x, y, z\}$, utilizando por ejemplo la identidad $\max\{x, y, z\} = \max\big\{x, \max\{y, z\}\big\}$.

8.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales, justificando si son máximo o mínimo en algún caso:

(i) $A = \{x : x^3 < 9\}$,

(ii) $B = \{x : x^3 \geq 9\}$,

(iii) $C = \big\{-x : x \in [2, 3)\big\}$,

(iv) $D = \big\{x + \frac{1}{x} : x > 0\big\}$,

(v) $E = \big\{x : \ln(5 - x^2) > 0\big\}$,

(vi) $F = \big\{-\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{0\}$,

(vii) $G = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$,

(viii) $H = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ 1 \leq x^2 < 2\}$.

9.- Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, hallar el ínfimo del conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$.

10.- Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, para todo $A, B \subset \mathbb{R}$, donde el conjunto $A + B$ se define como $A + B = \{a + b : a \in A, \, b \in B\}$. ¿Es cierto que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$? Calcular el supremo y el ínfimo del conjunto $(A - B)$.

11.- ¿**Verdadero o falso** (demostrar o dar un contraejemplo en cada caso)?

Si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$ es una colección decreciente de intervalos, entonces :

(a) $\inf_n \big(\sup I_n\big) \ \leq \ \sup_n \big(\inf I_n\big)$

(b) $\sup_n \big(\inf I_n\big) \ \leq \ \inf_n \big(\sup I_n\big)$