Análisis Matemático I — Curso 2007-2008.
1º Ingeniería Informática

Hoja 3: Límites y Derivadas

1.- Calcular los siguientes límites:

$(a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$ $\quad (b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2\,\mathrm{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ $\quad (c)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{3\,\mathrm{sen}^4 x+\mathrm{sen}^5 x}$

$(d)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+x^2}{2\,x^2}$ $\quad (e)\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{[x]}}$ $\quad (f)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+1)}{\log(x^{10}+x^7+100)}$

$(g)\ \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2\,x-1}$ $\quad (h)\ \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x\,2^x}{2+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad (i)\ \lim_{x\to 1^-} (x^5-2\,x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$

$(j)\ \lim_{x\to 0^+} |\,\mathrm{sen}\, x|^{\frac{1}{\log x}}$ $\quad (k)\ \lim_{x\to 1^+} (x^5-2\,x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$ $\quad (l)\ \lim_{x\to\infty} (7\,x+5\,x^4)^{\frac{1}{6+2\,\log(2\,x+1)}}$

2.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$(a)\ y=\log\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad (b)\ y=\mathrm{sen}(\log x)$ $\quad (c)\ y=\log(x^2\,\log^3 x)$

$(d)\ y=x^{\tan(2\,\pi x)}$ $\quad (e)\ y=\mathrm{arc\,sen}\,\sqrt{x^2-1}$ $\quad (f)\ y=\arctan\sqrt{x^2-1}$

$(g)\ y=x^{x^{\cos x}}$ $\quad (h)\ y=x^{\log x}$ $\quad (i)\ y=(\log x)^x$

$(j)\ y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad (k)\ y=\tan(x^2+\log x+\arctan x)$ $\quad (l)\ y=2^{\sec(x^3+7\,x-10)}$

$(m)\ y=\sec(\mathrm{cosec}\,x)$ $\quad (n)\ y=(x^2+1)^{e^x}$ $\quad (o)\ y=\sqrt[5]{\cot an^8(x^2)}$

$(p)\ y=x^{\frac{1}{x}}$ $\quad (q)\ y=\log_x e^x$ $\quad (r)\ y=e^{e^x}$

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

$(a)\ f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad (b)\ f(x)=\arccos x$ $\quad (c)\ f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$

$(d)\ f(x)=2^{-\frac{1}{|x|}}$ $\quad (e)\ f(x)=\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ $\quad (f)\ f(x)=\log|x|$

$(g)\ f(x)=\log\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ $\quad (h)\ f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\quad (i)\ f(x)=x^2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 2,\\ a\cdot x+b & \text{si} \quad x>2.\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} a+b\cdot x^2 & \text{si} \quad |x|\le 2,\\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x|>2.\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x & \text{si} \quad x\le 0,\\ b-x^2 & \text{si} \quad 0<x<1,\\ c\cdot\arctan x & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases} \qquad f_4(x)=\begin{cases} \mathrm{sen}(\pi\,x)+a & \text{si} \quad x\le 0,\\ a+b\cdot x & \text{si} \quad 0<x<2,\\ c\cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

5.- Probar que si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $y = |f(x)|$ es derivable en $x = a$.

6.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

7.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

8.- Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

9.- Una empresa de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h, para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

10.- Obtener las siguientes desigualdades usando el teorema del valor medio:

(a) $1 + x \leq e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

11.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo una solución en $[-1, 1]$. ¿Para que valores de k existe efectivamente la solución?

12.- Demostrar que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

13.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.