Hoja 5: Integrales

1.- Calcular, aplicando directamente la definición, $\int_0^2 x\,dx$.

2.- Probar que la función $y = \lfloor x \rfloor$ es integrable en $[0,5]$ y calcular $\int_0^5 \lfloor x \rfloor\,dx$.

3.- Expresar como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

4.- Sea una función continua en $[a,b]$. Definimos la *media integral* de f sobre $[a,b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre $[a,b]$. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?.

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado:

> **Teorema.** *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, existe $c \in [a,b]$, tal que,*
>
> $$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a,a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^{a} x^7 \,\mathrm{sen}(x^4)\,dx$.

5.- Sabiendo que $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$ para todo $a > 0$, calcular $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\mathrm{sen}\, t^2)\, \log(1+t^2)\,dt, \qquad G(x) = \int_{-e^x}^{\mathrm{sen}^2 x} \cos(\log(2\,t^2))\,dt.$$

7.- Encontrar una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\,f(t)\,dt = 6\,x^4.$$

8.- Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

(1) $\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$ (2) $\int \dfrac{dx}{2\,x^2+8}$ (3) $\int \dfrac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$

(4) $\int \dfrac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$ (5) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$ (6) $\int \dfrac{x^4}{x^2+4}\,dx$

(7) $\int x^3\,\sqrt{x^2-1}\,dx$ (8) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (9) $\int x^2\,\sqrt{1+x}\,dx$

(10) $\int \dfrac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}$ (11) $\int \dfrac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx$ (12) $\int \dfrac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$

(13) $\int \dfrac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx$ (14) $\int \dfrac{dx}{2+3\,\cos x}$ (15) $\int \dfrac{dx}{(x^2-1)^2}$

(16) $\int \dfrac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ (17) $\int \dfrac{dx}{(x^2+2)^2}$ (18) $\int \dfrac{x^5+2\,x+1}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$

(19) $\int \dfrac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)}$ (20) $\int \dfrac{x}{1+x^4}\,dx$ (21) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

(22) $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (23) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x}$ (24) $\int \dfrac{dx}{\cos x}$

(25) $\int \dfrac{dx}{\cos^3 x}$ (26) $\int \log x\,dx$ (27) $\int x\,\log x\,dx$

(28) $\int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx$ (29) $\int x^3\,e^{-2\,x}\,dx$ (30) $\int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx$

(31) $\int \operatorname{sen}^4 x\,\cos^6 x\,dx$ (32) $\int \operatorname{sen}^3 x\,\cos^6 x\,dx$ (33) $\int \operatorname{sen}(2\,x)\,\cos(5\,x)\,dx$

(34) $\int \arctan x\,dx$ (35) $\int \left(\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$ (36) $\int x^2\,\operatorname{arc\,cos} x\,dx$

9.-

(a) Hallar $\int \tan x\,dx$, $\int \tan^2 x\,dx$. Calcular $\int \tan^n x\,dx$, expresando esta integral en términos de $\int \tan^{n-2} x\,dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^{10} x\,dx$ y para $\int \tan^{13} x\,dx$.

(b) Hallar $\int \sec^2 x\,dx$, $\int \sec^3 x\,dx$. Calcular $\int \sec^n x\,dx$, expresando esta integral en términos de $\int \sec^{n-2} x\,dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^{14} x\,dx$ y para $\int \sec^9 x\,dx$.

10.-

(a) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\,e^{-x}$, $y = x^2\,e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

(b) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.

11.- Utilizando el criterio de la integral estudiar la convergencia de las siguientes series

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0, \qquad\qquad \sum \frac{1}{n\log(n+1)}.$$