

1.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

- (a)  $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}$       (b)  $\left\{ \frac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$       (c)  $\left\{ \frac{n}{n^2-n-4} \right\}$   
(d)  $\left\{ \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$       (e)  $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2n+n}}{n^2+2} \right\}$       (f)  $\left\{ \frac{\sqrt{n+1+n^2}}{\sqrt{n+2}} \right\}$   
(g)  $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}$       (h)  $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$       (i)  $\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$   
(j)  $\left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^n \right\}$       (k)  $\left\{ \frac{2^n}{4^{n+1}} \right\}$       (l)  $\left\{ \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \right\}$   
(m)  $\left\{ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}$       (n)  $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$       (o)  $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right\}$

2.- a) Encontrar una expresión de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  como cociente de polinomios en  $n$ .

**Indicación.**  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

3.- Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

4.- Sea  $a > 1$ . Se define por recurrencia la sucesión  $\{a_n\}$  por la relación  $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$ ,  $a_1 = \sqrt{a}$ . Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.- Sea  $a_1 = 1$ . Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a)  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ ,    (b)  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$ ,    (c)  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$ ,    (d)  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$ .

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

**Indicación.** En algunos casos puede ser interesante escribir de forma explícita la expresión que tiene la sucesión.

6.- Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$(a) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}, \quad (b) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}}, \quad (c) 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\dots}}.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

7.- Demostrar que si  $a_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

8.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

9.- a) Probar por inducción que para  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!$$

b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$