## Hoja 7: Series

**1.-** Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(1) $\sum \frac{10^k}{k!}$ (2) $\sum \frac{1}{k\,2^k}$ (3) $\sum \frac{1}{k^k}$

(4) $\sum \left(\frac{k}{2\,k+1}\right)^k$ (5) $\sum \frac{n!}{100^n}$ (6) $\sum \frac{(\log k)^2}{k}$

(7) $\sum \frac{(\log k)^2}{k^2}$ (8) $\sum \frac{k^2+2}{2\,k^3+6\,k-20}$ (9) $\sum k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

(10) $\sum \frac{1}{1+\sqrt{k}}$ (11) $\sum \frac{2\,k+\sqrt{k}}{k^3+2\sqrt{k}}$ (12) $\sum \frac{k!}{10^{4\,k}}$

(13) $\sum \frac{k^2}{e^k+1}$ (14) $\sum \frac{2^k\,k!}{k^k}$ (15) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$

(16) $\sum \frac{1}{n\,(\log n)^{\frac{1}{2}}}$ (17) $\sum \frac{1}{n\,\log n(\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$ (18) $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3-2}}$

(19) $\sum \left(\frac{k}{k+10}\right)^k$ (20) $\sum \frac{(k!)^2}{(2\,k)!}$ (21) $\sum \frac{45}{1+100^{-n}}$

(22) $\sum \frac{n!}{n^n}$ (23) $\sum \frac{\log n}{n^2}$ (24) $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

(25) $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ )$ (26) $\sum(\sqrt[n]{n}-1)^n$ (27) $\sum \frac{1}{2^{\log n}}$

**2.-** Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\,n!}{n^n}\,,$$

según los valores de $a > 0$.

**3.-** Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\,(n+2)}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\,n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\,.$$

**4.-** Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,a_n$ es convergente.

(b) Si para todo $n$, $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,a_n$ es convergente.

(c) Si para todo $n$, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\, a_n$ es convergente.

(d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo $n$, $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-n)^n\, a_n$ es convergente.

**5.-** Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

**6.-** Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{k^k}{3^k\,k!}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{k\,\log k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\,.$$