25. Un barco situado en la posición $(1,0)$ en una carta de navegación (con el norte en la dirección y positiva) divisa una roca en la posición $(2,4)$. ¿Cuál es el vector que une al barco con la roca? ¿Qué ángulo θ forma este vector con la dirección norte? (Se le llama la *orientación* de la roca desde el barco.)

26. Supongan que el barco del ejercicio 25 apunta al rumbo norte y viaja con una rapidez de 4 nudos respecto al agua. Hay una corriente que fluye con dirección este a 1 nudo; las unidades de la carta son millas náuticas; 1 nudo = 1 milla náutica por hora.

(a) Si no hubiera corriente, ¿qué vector $\mathbf{u}$ representaría la velocidad del barco respecto al fondo del mar?

(b) Si el barco siguiera la corriente, ¿qué vector $\mathbf{v}$ representaría su velocidad respecto al fondo del mar?

(c) ¿Qué vector $\mathbf{w}$ representa la velocidad total del barco?

(d) ¿Dónde estará el barco después de una hora?

(e) ¿Deberá cambiar el rumbo el capitán?

(f) ¿Qué pasaría si la roca fuera un iceberg?

14. Hallar la proyección de $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

15. Hallar la proyección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

16. ¿Qué restricciones se deben tener sobre b para que el vector $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sea ortogonal a (a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y (b) $\mathbf{k}$?

17. Hallar dos vectores no paralelos, ambos ortogonales a $(1,1,1)$.

20. Suponer que un objeto moviéndose en la dirección de $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ está bajo la acción de una fuerza dada por el vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Expresar esta fuerza como una suma de una fuerza en la dirección del movimiento y una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento.

21. Una fuerza de 6 N (newtons) forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje y, apuntando a la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto a lo largo de la recta que une $(1,2)$ con $(5,4)$.

(a) Hallar una fórmula para el vector de fuerza $\mathbf{F}$.

(b) Hallar el ángulo θ entre la dirección del desplazamiento $\mathbf{D} = (5-1)\mathbf{i} + (4-2)\mathbf{j}$ y la dirección de la fuerza $\mathbf{F}$.

(c) El *trabajo* realizado es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, o de manera equivalente, $\|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{D}\|\cos\theta$. Calcular el trabajo con ambas fórmulas y comparar los resultados.

***22.** Un fluido fluye a través de una superficie plana con vector de velocidad uniforme $\mathbf{v}$. Sea $\mathbf{n}$ una normal unitaria a la superficie del plano. Mostrar que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ es el volumen del fluido que pasa por una unidad de área del plano en una unidad de tiempo.

20. Hallar una ecuación para el plano que pasa por $(2,-1,3)$ y es perpendicular a $\mathbf{v} = (1,-2,2) + t(3,-2,4)$.

23. Hallar una ecuación para el plano que contiene a las dos rectas

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,-2) + t(2,3,-1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = (2,-1,0) + t(2,3,-1).$$

32. La *velocidad angular* de rotación $\boldsymbol{\omega}$, de un cuerpo rígido tiene la misma dirección que el eje de rotación y magnitud igual a la tasa de giro en radianes por segundo. El sentido de $\boldsymbol{\omega}$ se determina por la regla de la mano derecha.

(a) Sea $\mathbf{r}$ un vector que va del eje a un punto P del cuerpo rígido. Mostrar que el vector $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es la velocidad de P, como en la figura 1.3.9, con $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{r} = \mathbf{v}_2$.

(b) Interpretar el resultado para la rotación de un carrusel alrededor de su eje, donde P es un punto en la circunferencia.

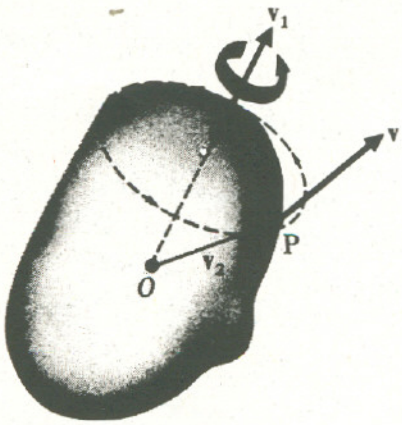

Figura 1.3.9 El punto P tiene vector velocidad $\mathbf{v}$.

2. Mostrar en $\mathbf{R}^n$ que

$\boxed{\text{(a)}}$ $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (Esto se conoce como la ley del paralelogramo).

(b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

(c) $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (A esto se le llama la identidad de polarización.)

Interpretar estos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

21. **(a) Probar que el área del triángulo en el plano con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), es el valor absoluto de**

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Hallar el área del triángulo con vértices $(1,2)$, $(0,1)$ y $(-1,1)$.

27. **Verificar las desigualdades de Cauchy-Schwarz y del triángulo para**

$$\mathbf{x} = (3,2,1,0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y} = (1,1,1,2).$$

$\boxed{\textbf{33.}}$ El trabajo W realizado al mover un objeto de $(0,0)$ a $(7,2)$ sujeto a una fuerza $\mathbf{F}$ es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector con cabeza en $(7,2)$ y cola en $(0,0)$. Las unidades son metros y kilos.

(a) Suponer que la fuerza $\mathbf{F} = 10\cos\theta\mathbf{i} + 10\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}$. Hallar W en términos de θ.

(b) Suponer que la fuerza $\mathbf{F}$ tiene magnitud de 6 kg y forma un ángulo de $\pi/6$ rad con la horizontal, apuntando a la derecha. Hallar W en metros-kilos.