

EJERCICIOS ANÁLISIS MATEMÁTICO II PRIMER CURSO DE CIENCIAS FÍSICAS

TEMA 1: Topología y representación gráfica

1. Hallar la distancia mínima del punto $P = (1, 2, -3)$ a la hélice

$$H = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

¿Cuál sería la distancia mínima de P a la parte superior de la hélice

$$H_+ = \{(\cos t, \sin t, t) : t > 0\}?$$

2. Probar e interpretar la desigualdad triangular para la distancia:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

3. Hallar el interior, la clausura y la frontera de los siguientes conjuntos:

(a) *Región hiperbólica*: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$.

(b) *Anillo circular*: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(c) *Paraboloide hiperbólico*: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$.

(d) *Sucesión doble*: $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m = 1, 2, \dots\}$.

(e) *Cuadrado*: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$.

4. ¿Verdadero o falso?

(a) Si $A \subset B$, entonces $\text{Inter}(A) \subset \text{Inter}(B)$.

(b) Si A es abierto, entonces $\partial A = \emptyset$.

(c) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(d) Si $x \in \partial S$, entonces x es un punto límite de S .

(e) Si $x \in \partial S$, entonces $x \in \bar{S} \setminus S$.

5. Representar gráficamente:

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$.

(b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(c) $f(x, y) = |x - y|$.

6. Relacionar las siguientes funciones en \mathbb{R}^2 con las gráficas correspondientes:

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y}; \quad g(x, y) = \frac{1}{1 + 4x^2 + y^2};$$

$$h(x, y) = e^{-x^2 - 4y^2}; \quad i(x, y) = \frac{x}{y};$$

$$j(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}; \quad k(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$