EJERCICIOS ANÁLISIS MATEMÁTICO II
PRIMER CURSO DE CIENCIAS FÍSICAS

<u>Tema 2</u>: `Límites y continuidad`

1. Calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4};\quad (b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2-y^2};\quad (c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2};$$

$$(d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad (e)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}};\quad (f)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x)}{\mathrm{e}^y-1}.$$

$$(g)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2};\quad (h)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+\sin^2 x)^{\tan x}}{\arcsin x^2(1-\cos\sqrt{y}}.$$

2. Demostrar que las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tienen límite en el origen a lo largo de cualquier recta pero no tienen límite en dicho punto:

$$(a)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y}{y+x^2} & \text{si } y\neq -x^2 \\ 1 & \text{si } y=-x^2 \end{cases}\qquad (b)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^9+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. Determinar, para cada una de las siguientes funciones, el conjunto de puntos en los que son continuas:

$$(a)\quad f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2\,,\qquad (b)\ f(x,y)=\ln(x^2+y^2)\,,$$

$$(c)\quad f(x,y)=\frac{\cos\ x^2}{y}\,, y\ \neq\ 0\,,\qquad (d)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4. Sea la función

$$f(x,y)\ =\ \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) Hallar el límite de f en el origen a lo largo de cualquier recta que pase por (0,0).

(b) Estudiar si sería posible definir $f(0,0)$, de modo que f fuera continua en el origen.

5. Dada la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{y+x^2}} \arcsin \dfrac{y}{x} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determinar y dibujar su dominio de definición.
b) Calcular los límites reiterados y también los límites a lo largo de rectas que pasan por el origen.
c) Calcular los límites en el origen según las curvas $y = -x^2 + x^6$.
d) Estudiar la continuidad en el origen.

6. Sea la función:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudiar la continuidad de f.

(b) Probar que f está acotada y encontrar una cota superior.

(c) Probar que f alcanza un máximo absoluto sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y que ese máximo es 1. En qué punto o puntos de la circunferencia se alcanza ese máximo?