

## EJERCICIOS ANÁLISIS MATEMÁTICO II PRIMER CURSO DE CIENCIAS FÍSICAS

TEMA 2: Límites y acotaciones.

1. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}; \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} ye^x + \sin x + (xy)^4; \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy};$$
$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{xy^4}{1 + y^2 + x^4}; \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{e^y - 1}; \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}.$$

2. Sea  $P(\mathbf{x})$  un polinomio en  $\mathbb{R}^n$  de grado  $d$ . Probar que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{P(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^\alpha} = 0, \quad \text{si } \alpha < d.$$

¿Qué ocurre si  $\alpha > d$ ? ¿Y si  $\alpha = d$  (prueba algunos ejemplos)?

3. Probar que  $\sin x - x = O(|x|^3)$ .

4. Probar que, para todo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

5. Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}$  probar que  $|A\mathbf{x}| \leq \|A\| |\mathbf{x}|$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde

$$\|A\| = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Probar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $a$ , entonces  $f(x) - f(a) = O(|x - a|)$ .