MATEMATICAS
Primer curso de Ciencias Biológicas / Curso 2006-2007

HOJA 1

1. En 1978, H. Cavendish realizó una serie de 29 experimentos con objeto de medir la densidad de la tierra. Sus resultados, tomando como unidad la densidad del agua, fueron:

5'50	5'61	4'88	5'07	5'26	5'55	5'36	5'29	5'58	5'65
5'57	5'53	5'62	5'29	5'44	5'34	5'79	5'10	5'27	5'39
5'42	5'47	5'63	5'34	5'46	5'30	5'75	5'68	5'85	

   (a) Representa los datos por medio de un diagrama de tallos y hojas.
   (b) Halla la mediana y los cuartiles; representa los datos por medio de un diagrama de caja y bigotes.
   (c) Halla la media y la desviación típica.
   (d) ¿Es la distribución aproximadamente normal?

2. El maíz es un alimento importante para los animales. De todas formas, este alimento carece de algunos aminoácidos que son esenciales. Un grupo de científicos desarrolló una nueva variedad que sí contenía niveles apreciables de dichos aminoácidos. Para comprobar la utilidad de esta nueva variedad para la alimentación animal se llevó a cabo el siguiente experimento: a un grupo de 20 pollos de 1 día se les suministró un pienso que contenía harina de maíz de la nueva variedad. A otro grupo de 20 pollos (grupo de control) se le alimentó con un pienso que sólo se diferenciaaba del anterior en que no contenía harina de la variedad mejorada de maíz. Los resultados que se obtuvieron sobre las ganancias de peso de los pollos (en gramos) al cabo de 21 días de alimentación fueron los siguientes:

   - *Variedad normal*
     380 321 366 356 283 349 402 462 356 410 329 399 350 384 316 272 345 455 360 431
   - *Variedad mejorada*
     361 447 401 375 434 403 393 426 406 318 467 407 427 420 477 392 430 339 410 326

   (a) Para comparar las dos distribuciones, representa los dos diagramas de caja y bigotes en un mismo gráfico. ¿Qué se puede deducir de estos diagramas?
   (b) ¿Cuáles son las medias y desviaciones típicas de los datos de ambos grupos? ¿Qué diferencias hay entre ambos?

3. La EPA (Agencia de Protección del medio ambiente de EEUU) exige a los fabricantes de automóviles que indiquen los consumos, tanto por ciudad como por carretera, de cada uno de sus modelos. A continuación se presentan los datos de consumo por carretera de 30 modelos de automóvil de 1994, expresados en litros por cada 100 km:

$12,3$	$9,1$	$10,1$	$10,4$	$9,7$	$11,3$	$11,3$	$10,8$	$9,7$	$10,1$	$10,8$	$10,5$	$11,3$	$9,7$	$10,8$
$10,5$	$12,8$	$12,3$	$10,8$	$11,3$	$9,1$	$11,8$	$11,8$	$14,1$	$10,8$	$18,8$	$10,8$	$10,4$	$10,1$	$10,8$

   (a) Representa gráficamente la distribución de los datos de la tabla. Describe con palabras las principales características (aspecto general, presencia de observaciones atípicas, etc).
   (b) ¿Cuál es el consumo mediano? ¿Cuántos litros por cada cien kms debe consumir como máximo un automóvil para estar entre el 25% de modelos que consumen menos?
   (c) Halla la media y explica cómo se compara con la mediana.

4. Según datos del ejército, la distribución del perímetro craneal entre sus soldados es aproximadamente normal con media 57,9 cm y desviación típica 2,8 cm. Los cascos militares se producen de forma industrial excepto para los soldados con perímetros craneales situados en el 5% superior o en el 5% inferior, para los cuales se hacen a medida. ¿Para qué perímetros craneales se hacen los cascos a medida?

5. Supongamos que la variable peso, medida en una cierta población de hombres adultos, sigue una distribución normal de media 76 Kg. y de DT 7'0 Kg. Se pide,

   (a) porcentaje de la ploblación entre 80 y 90 Kg.
   (b) porcentaje de la población entre 60 y 70 Kg.;
   (c) porcentaje de la población entre 70 y 80 Kg.;
   (d) porcentaje de la población por encima de los 78 Kg.
   (e) porcentaje de la población por encima de los 61 Kg.
   (f) hallar los cuartiles y la distancia intercuartílica;
   (g) hallar el primer decil.

6. El número de nacidos en España en 1995, por grupos de edades de la madre, es el siguiente

edad de la madre	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
número de nacidos	11874	45715	127683	127805	43628	6339	306

   (a) Elabora un histograma que represente estos datos.
   (b) Halla la mediana, los cuartiles y la distancia intercuartílica. Dibuja un diagrama de caja y bigotes.
   (c) Elige marcas de clase y halla la media y la desviación típica (DT) de la variable "edad de la madre".
   (d) Compara el número de individuos que se encuentran a menos de una DT de la media con el número esperado si fuese normal.
   (e) Si fuese una distribución normal con la media y DT halladas, ¿Cuál sería el número de casos en cada uno de los intervalos de la tabla?

7. Los pesos al nacer de una muestra de 70 individuos se distribuyen según la siguiente tabla de frecuencias:

peso	17'5–22'5	22'5–27'5	27'5–32'5	32'5–37'5	37'5–42'5	42'5–47'5
frecuencia	1	8	24	21	15	1

   (a) Elabora un histograma representando estos datos.
   (b) Halla la mediana, los cuartiles y la distancia intercuartílica. Dibuja un diagrama de caja y bigotes.
   (c) Halla la media y la desviación típica de esta variable.
   (d) Compara el número de individuos que se encuentran a menos de una desviación típica de la media con el número que correspondería si fuese normal.
   (e) Si fuese una distribución normal con la media y DT halladas, ¿Cuál sería el porcentaje de población correspondiente a cada uno de los intervalos de la tabla?

8. La siguiente tabla da los percentiles correspondientes a las ganancias por trabajador y año en miles de pesetas correspondiente a 1995.

percentil	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90
ganancias	986'0	1413'1	1539'8	1661'1	1919'8	2236'6	2624'4	3092'9	3359'9	3681'7	4765'4

   (a) Elabora un histograma con estos datos (hace falta tomar una decisión sobre el mínimo y el máximo).
   (b) Dibuja un diagrama de caja y bigotes.
   (c) Halla la media y la desviación típica (hace falta asignar *marcas de clase*).
   (d) Comenta la posible *normalidad* de los datos.

HOJA 2

1. El número medio de hijos por mujer en la Comunidad Europea ha evolucionado según indica la tabla siguiente

Año	1976	1981	1986	1991	1995	1996
Número de hijos	$1,92$	$1,77$	$1,59$	$1,53$	$1,43$	

Hallar la recta de regresión del “número de hijos” en función del tiempo y utilizarla para estimar el dato que omite la tabla.

2. Los manatíes son unos animales grandes y dóciles que viven a lo largo de la costa de Florida. Cada año las lanchas motoras hieren o matan muchos de ellos. A continuación se presenta una tabla que contiene, para cada año, el número de licencias para motoras (expresado en miles de licencias) expedidas en Florida y el número de manatíes muertos en los años 1977 a 1990.

Año	Licencias	Manatíes	Año	Licencias	Manatíes
1977	447	13	1984	559	34
1978	460	21	1985	585	33
1979	481	24	1986	614	33
1980	498	16	1987	645	39
1981	513	24	1988	675	43
1982	512	20	1989	711	50
1983	526	15	1990	719	47

a) Dibujar un diagrama de dispersión del número de manatíes muertos sobre el número de licencias anuales. ¿Qué nos dice el diagrama sobre la relación entre esas dos variables?

b) Hallar la recta de regresión del número de manatíes muertos sobre el número de licencias anuales. ¿Se puede predecir con precisión el número de manatíes muertos cada año conociendo el número de licencias expedidas ese año? Si Florida decidiera congelar el número de licencias en 700.000, ¿cuántos manatíes matarían, aproximadamente, las lanchas motoras?

3. Los corredores buenos dan más pasos por segundo a medida que aumentan la velocidad. He aquí el promedio de pasos por segundo de un grupo de corredoras de élite a distintas velocidades. La velocidad se expresa en metros por segundo.

Velocidad (m/s)	$4,83$	$5,14$	$5,33$	$5,67$	$6,08$	$6,42$	$6,74$
Pasos por segundo	$3,05$	$3,12$	$3,17$	$3,25$	$3,36$	$3,46$	$3,55$

a) Quieres predecir el número de pasos por segundo a partir de la velocidad. Para ello, dibuja un diagrama de dispersión.

b) Halla la recta de regresión del número de pasos por segundo con relación a la velocidad. ¿Es bueno el ajuste?

4. La tabla siguiente presenta tres conjuntos de datos preparados por el estadístico Frank Anscombe para ilustrar los peligros de hacer cálculos sin antes representar los datos. *Los tres conjuntos de datos tienen la misma correlación y la misma recta de regresión.*

Conjunto de datos A:

X	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
Y	$8,04$	$6,95$	$7,58$	$8,81$	$8,33$	$9,96$	$7,24$	$4,26$	$10,84$	$4,82$	$5,68$

Conjunto de datos B:

X	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
Y	$9,14$	$8,14$	$8,74$	$8,77$	$9,26$	$8,10$	$6,13$	$3,10$	$9,13$	$7,26$	$4,74$

Conjunto de datos C:

X	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	19
Y	6,58	5,76	7,71	8,84	8,47	7,04	5,25	5,56	7,91	6,89	12,50

a) Calcula la correlación y la recta de regresión para los tres datos y comprueba que son iguales.

b) Dibuja un diagrama de dispersión para cada uno de los conjuntos de datos con las rectas de regresión correspondientes.

c) ¿En cuál de los tres casos utilizarías la recta de regresión para predecir Y dado $X = 14$.

Conclusión: REPRESENTA SIEMPRE TUS DATOS.

5. En una reserva natural, se controla el número de ejemplares N de cierta especie al final de cada año, haciéndose el seguimiento a lo largo de 6 años. Los datos obtenidos se resumen a continuación:

$$\sum N_i = 683 \qquad \sum t_i = 21$$
$$\sum N_i^2 = 77987 \qquad \sum t_i^2 = 91 \qquad \sum t_i N_i = 2455$$

a) Hallar la recta de regresión de N en función del tiempo.

b) Evaluar lo bueno o lo malo que es el ajuste realizado.

c) ¿Cuál sería la población prevista al final del décimo año, si sigue evolucionando de la misma forma?

6. El tiempo de vida de ciertos insectos parece que se ve influido por el porcentaje de humedad del hábitat en que se encuentran. Para estudiar esto, se toman muestras en 10 hábitats diferentes de las variables X="Porcentaje medio de humedad" e Y="Tiempo medio de vida", obteniéndose un porcentaje medio de humedad del 59% y un tiempo medio de vida 28'7 días. Además:

$$\sum x_i^2 = 35140; \qquad \sum y_i^2 = 8573; \qquad \sum x_i y_i = 17260$$

a) Expresar el tiempo medio de vida en función de la humedad mediante la recta de regresión. Evaluar el ajuste.

b) ¿Cuál sería el tiempo medio de vida estimado si la humedad es del 65%?

7. Se han realizado 9 tomas de presión intracraneal (en mm de Hg) en animales de laboratorio, por un método estándar directo (X) y por una nueva técnica experimental indirecta (Y). Los resultados obtenidos se resumen a continuación:

$$\sum x_i = 343 \qquad \sum y_i = 325 \qquad \sum x_i^2 = 17693 \qquad \sum y_i^2 = 16367 \qquad \sum x_i y_i = 16992$$

a) Calcular la recta de regresión de Y sobre X. Para una presión intracraneal de 55 mm de Hg, medida con el método estándar, ¿qué presión cabría esperar con la nueva técnica?

b) ¿Qué podemos decir del ajuste de la recta de regresión a nuestros datos?

HOJA 3

1. El *modelo exponencial*
$$y = N_0\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^t = N_0 e^{t\ln(1+\frac{\alpha}{100})} = N_0 e^{\beta t}$$
corresponde a un crecimiento (o decrecimiento) del tamaño de una población del $\alpha\%$ en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de N_0 (en $t = 0$).

   a) Representar las funciones $y = 100e^{2t}$ e $y = 100e^{-t}$.

   b) Si el crecimiento es de un 5% por unidad de tiempo y $N_0 = 100$, ¿cuál es la velocidad de crecimiento de y en el instante $t = 3$? ¿Y en $t = 50$?

2. La *función logarítmica*
$$y = k + \beta \ln x$$
se utiliza, por ejemplo, para describir empíricamente la relación entre la concentración (X) de una hormona de crecimiento para plantas y el tamaño alcanzado por la planta (Y).

   a) Representar la función $y = 100 + 2\ln x$.

   b) Hallar la concentración X para la cual la magnitud Y crece una unidad por cada unidad de aumento de la concentración.

3. Hace tiempo, los zoólogos encontraron que las medidas realizadas en dos partes diferentes del cuerpo (X e Y) de individuos en crecimiento de una especie animal, se podían relacionar (aproximadamente) de la siguiente forma:
$$\ln y = a + b\ln x \qquad \textit{(relación alométrica),}$$
o lo que es igual:
$$y = e^a e^{b\ln x} = kx^b, \qquad \text{para } x > 0.$$
Representar las funciones $y = 2x^3$ e $y = 2x^{1/2}$.

4. Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la *función logística*:
$$y = f(t) = \frac{k}{1+ae^{-\beta t}}, \qquad \text{para } t > 0 \qquad (a, k, \beta > 0)$$

   a) Representar la función $y = \frac{100}{1+2e^{-t}}$, para $t > 0$.

   b) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.

   c) ¿En qué tamaño tiende a estabilizarse la población?

5. En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad (v) de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por
$$v = f(s) = \frac{as}{k+s}, \qquad \text{para } s > 0 \qquad (a, k > 0),$$
donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten.*

   a) Representar la función.

   b) Hallar la velocidad máxima de conversión que se puede alcanzar.

   c) Calcular cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de la máxima alcanzable.

6. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \leq t < \infty,$$

donde t representa el tiempo en semanas.

a) Representar la función.

b) Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.

c) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima.

7. Obsérvese que si se pierde un 50%, después hay que ganar un 100% para volver a la situación original. Calcular qué porcentajes habría que perder para volver a la situación original después de ganar un: 25%, 300%, 50%.

8. Un gas confinado en un depósito perforado, pierde una proporción fija de las moléculas por unidad de tiempo. A las 7 de la mañana medimos una concentración en el depósito de 15 *ppm* (partes por millón). Media hora más tarde la concentración ha bajado un 1% respecto a la anterior.

a) Escribir la función que expresa la concentración del gas en función del tiempo.

b) ¿Que concentración había a las 3 : 30 de la mañana, antes de que hiciésemos nuestra primera medición?

c) ¿Cuanto tardará en bajar la concentración hasta 3 *ppm*?

9. En el vertedero de basura de Valdemingómez se ha observado que cada año los camiones de la CAM depositan un 5% más de basura que el año anterior. Como la basura no se retira, se va acumulando.

a) Escribir la función que expresa la cantidad de basura depositada cada año por los camiones de la CAM en el vertedero.

b) Encontrar la fórmula que da la cantidad de basura acumulada en el vertedero al cabo de n años.

c) Si inicialmente el vertedero estaba vacío y al cabo de un año contenía 1000 toneladas de basura, calcular cuantos años han de pasar para que la basura acumulada supere las 90.000 toneladas.

10. Al abrir una cuenta en un banco nos dicen que nos van a abonar cada mes un 0,4167% de interés sobre el capital acumulado. Si inicialmente depositamos 100 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de un año?

11. Se está estudiando una especie de gato montés. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%, en condiciones medias es de un 0,549% y en condiciones adversas el numero de animales decrece anualmente en un 4,5%. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100.

a) En cada una de esas tres situaciones, escribir la función que expresa el número de animales al cabo de n años.

b) Se observa que bajo buenas condiciones, la población crece. Esto puede provocar un desequilibrio ecológico en la zona. Para solucionar esto, se discuten varios planes. El primero es permitir la caza de un gato cada año. El segundo es permitir que se cace un 5% de los gatos cada año. Para cada uno de estos planes, escribir la función que expresa el número de animales al cabo de n años. ¿Cuál sería el número estimado de gatos, con cada plan, al cabo de 25 años?

12. Considerar el *modelo exponencial* $y = f(t) = 100e^{0'0488t}$ correspondiente a un crecimiento del 5% en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de $N_0 = 100$ (en $t = 0$).

a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 para aproximar $f(t)$ alrededor de $t = 0$.

b) Comparar el valor exacto y el aproximado del tamaño de la población al cabo de 2 unidades de tiempo.

13. Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar la función $y = f(t) = \ln(1 + t)$ alrededor de $t = 0$. Comparar el valor exacto y el aproximado para $t = 1$.

14. Un estudiante decide aceptar un contrato en prácticas de un año (para obtener créditos de libre configuración). Tiene dos ofertas.

    La empresa A le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán un 5% más que el anterior.

    La empresa B le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán 5,5 euros más que el anterior.

    a) Para cada una de las ofertas obtener, razonadamente, el sueldo que obtendría el último mes del año.

    b) Para cada una de las ofertas obtener, razonadamente, el sueldo total que obtendría en un año.

15. El número N de cabezas de ganado vacuno(en miles) en una región se ve afectado por una epidemia. Como consecuencia, este número empieza a disminuir, hasta que las eficaces medidas del gobierno comienzan a solucionar la situación. La función que describe, aproximadamente, la evolución de N en función del tiempo (en años) es:

    $$N(t) = \frac{5t^2 - 5t + 10}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

    a) Número de cabezas de ganado al comenzar el problema.

    b) ¿Cuándo se hace mínimo el número de cabezas de ganado vacuno? ¿Cuál es el número de reses en el peor momento?

    c) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento del número de reses al cabo de 3 años?

    d) ¿En qué valor tiende a estabilizarse N cuando va pasando el tiempo?

    e) Con los resultados de los apartados anteriores hacer una representación aproximada de la evolución de N.

16. a) La política seguida en una reserva natural para proteger cierta especie resulta un éxito, y cada año la población se incrementa en un 8%. Si al iniciar el programa se contaba con 20 ejemplares, ¿cuál es la población estimada al cabo de 30 años?

    b) ¿Cuál tendría que ser el porcentaje de incremento anual para conseguir la misma población final que en el apartado anterior, pero en solo 20 años?

17. Una sustancia radiactiva se desintegra a razón de un α% cada año.

    a) Si la cantidad de sustancia presente en este momento es de 120 Kg., hallar la expresión de la cantidad de sustancia, $C(t)$, al cabo de t años.

    b) Calcular el valor de α sabiendo que dentro de 20 años la cantidad de sustancia presente será el doble de la que habrá dentro de 40 años.

18. Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico (Y) de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses). Este nivel de ácido úrico se puede describir, durante un buen período de tiempo, mediante la función:

    $$y = f(t) = 4\log(t+1) - 5\log(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

    (log = logaritmo neperiano)

    a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?

    b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?

    c) Hacer una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período [0, 24] (los dos primeros años).

19. Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia y paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número de individuos por mililitro (N) de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado por la función:

$$N = 50(6t+1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

a) Número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio.

b) Calcular el número máximo de individuos e indicar cuando se alcanza.

c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

20. Cada 4 horas tomamos 20 miligramos de un medicamento y cada 4 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

a) ¿Cuántos miligramos de medicamento tendremos inmediatamente después de tomar la tercera dosis?

b) Escribir la función que expresa el número de miligramos en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 4 horas).

c) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

HOJA 4

1. En un experimento controlado, se observa el tamaño (Y) (en cm.) alcanzado por cuatro plantas a las que se les suministra diferentes cantidades (X) de hormona del crecimiento. Los resultados son los siguientes:

X	5	10	15	20
Y	18	22	23	25

a) Ajustar un modelo de regresión de la forma $Y = a + b \ln X$.

b) Evaluar si el ajuste es bueno o no.

2. Los siguientes datos corresponden a la evolución del peso celular (en mgr./ml.) y la cantidad de nitrato en un cultivo de algas durante 3 días (mediciones cada 24 horas).

Tiempo (T)	Peso (X)	Cantidad de nitrato (Y)
Inicio	$0,07$	$12,5$
1 dia	$0,19$	$10,4$
2 dias	$0,52$	$7,8$
3 dias	$1,07$	$4,5$

a) Ajustar una recta y una exponencial a los datos "peso' (X) y "cantidad de nitrato" (Y).

b) Ajustar una curva a la evolución temporal del peso.

c) Mediante lo obtenido en a) y b) estimar la cantidad de nitrato que había en el cultivo al cabo de 36 horas.

3. El muestreo de áreas contiguas se utiliza en Ecología para contar el número de especies distintas de plantas por área. El recuento se realiza de manera que cada siguiente área contigua tiene el doble de superficie, empezando por un área de 1 m^2. El modelo que relaciona $Y =$ "número de especies diferentes" con $X =$ "superficie en m^2" es $Y = a \ \log X + b$ ($a =$ índice de diversidad, $b =$ número de especies por unidad de área). Ajustar dicho modelo a los datos:

$X:$	1	2	4	8	16	32	64
$Y:$	2	4	7	11	16	19	21

4. En un estudio sobre la resistencia a bajas temperaturas del bacilo de la fiebre tifoidea, se expusieron cultivos del bacilo durante diferentes periodos de tiempo a -5 grados C. Los siguientes datos representan:

X = tiempo de exposición (en semanas).

Y = porcentaje de bacilos supervivientes.

$X:$	0	$0,5$	1	2	3	5	9	15
$Y:$	100	42	14	$7,5$	$0,4$	$0,11$	$0,05$	$0,002$

$$\sum x_i = 35,5 \qquad \sum y_i = 164,062$$
$$\sum \log y_i = 0,664 \qquad \sum x_i^2 = 345,25$$
$$\sum y_i^2 = 12016,42 \qquad \sum (\log y_i)^2 = 99,52$$
$$\sum x_i y_i = 52,23 \qquad \sum x_i \log y_i = -125,394.$$

Ajustar una recta y una exponencial a los datos. Interpretar los resultados.

5. Una fábrica de cerveza quiere averiguar si existe una relación lineal entre el dinero que gasta en anuncios de televisión y sus ventas totales. Analizar los siguientes datos:

Mes	Ventas (miles de dólares)	Gastos en anuncios de TV (miles de dólares)
Enero	50	$0,5$
Febrero	90	$0,9$
Marzo	30	$0,4$
Abril	90	$0,7$
Mayo	91	$1,1$
Junio	95	$0,75$
Julio	95	$0,8$

6. En un estudio de laboratorio se han medido, en una cierta especie canina, las variables peso (X) y concentración en sangre (Y) de una cierta sustancia. Los datos resumidos son los siguientes:

$$\begin{array}{ccc} n = 7 & \sum x_i = 13'5 & \sum x_i^2 = 26'75 \\ \sum y_i = 11'7 & \sum y_i^2 = 19'83 & \sum x_i y_i = 22'23 \\ \sum \frac{1}{x_i} = 3'7281 & \sum \frac{1}{x_i^2} = 2'0374 & \sum \frac{y_i}{x_i} = 6'3206 \end{array}$$

a) Calcular el coeficiente de correlación entre X e Y.

b) Ajustar una curva de ecuación $Y = a + b\frac{1}{X}$ a los datos.

7. En cierta especie de pez se mide la longitud total y la de la aleta caudal, obteniendo los siguientes datos:

Longitud total (Y)	16	39	53	81
Longitud de la aleta (X)	2	$2,5$	$2,7$	3

Se cree que existe una relación alométrica entre las dos longitudes. En consecuencia, se pide:

a) Expresar la longitud total en función de la longitud de la aleta mediante un modelo de regresión potencial $Y = aX^b$.

b) Evaluar el ajuste obtenido.

c) Estimar la longitud total de un pez, si su aleta caudal mide 2,3.

HOJA 5

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int x^5\,\sqrt{1-x^2}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \log x\,dx$

   d) $\displaystyle\int e^x\,sen\,x\,dx$

   e) $\displaystyle\int x^5\,sen(x^2)\,dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$

2. Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x) = sen\,x$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje x.

3. Dibujar la región delimitada por las curvas $y = 5 - x^2$ e $y = 3 - x$ y calcular su área.

4. Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t) = t(1-t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen. a) Hallar la posición del objeto 10 segundos más tarde. b) Hallar la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

5. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = At^2 + 1$. Calcular A sabiendo que $x(1) = x(0)$. Hallar la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

6. El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\,e^{-0'1t}}{(1+3\,e^{-0'1t})^2} \qquad (t=\text{“tiempo en años”}).$$

   a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$: obtener el resultado exacto y el resultado aproximado utilizando la regla se Simpson con 2 subintervalos.

   b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

7. La concentración de oxígeno $f(t)$ en un estanque contaminado con un residuo orgánico varía a lo largo del tiempo. La velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} \qquad (t=\text{“tiempo en semanas”}).$$

   a) Hallar la diferencia aproximada de concentración de oxígeno entre $t = 0$ y $t = 1$ mediante la regla de Simpson, considerando 4 subintervalos.

   b) Comparar el resultado aproximado con el exacto, sabiendo que

$$f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1},\ \text{para } t \geq 0$$

.

HOJA 6

1. Llamamos $x(t)$ a la proporción de individuos de una especie que existe en un instante t y se sabe que la velocidad de crecimiento relativa de $x(t)$, $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$, es proporcional a $1-x$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente. ¿A qué modelo de función corresponde?

2. Al abrir una cuenta en un banco nos dicen que nos van a abonar cada mes un 0,4167% de interés sobre el capital acumulado. Si inicialmente depositamos 100 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de un año? Resolverlo mediante una ecuación diferencial.

3. Se está estudiando una especie de gato montés. Se cuenta la población de estos animales un cierto año y se obtiene que hay 100. Se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales, la tasa anual de crecimiento de la población es de 1,676%. Esto puede provocar un desequilibrio ecológico en la zona. Para solucionar esto, se discuten varios planes. El primero es permitir la caza de un gato cada año. El segundo es permitir que se cace un 5% de los gatos cada año. Plantear las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada plan y calcular cual sería la población aproximada al cabo de 25 años, con cada uno de ellos.

4. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de una solución salina cuyo contenido en sal es de 1 Kg. A las 10 de la mañana se comienza a añadir al tanque otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro. El ritmo al que se añade dicha solución es de 3 litros por minuto. Al mismo tiempo sale del tanque una solución bien mezclada también al ritmo de 3 litros por minuto.

   a) Hallar la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo: $S(t)$.

   b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

   c) Calcular la cantidad que habrá a largo plazo.

5. Se observa que el número de individuos de una población evoluciona de acuerdo a la ecuación diferencial
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x-100)(200-x).$$
   Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos.

   a) Hallar la función $x(t)$.

   b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

   c) Se introduce una perturbación beneficiosa para la población, de manera que aumenta su velocidad de crecimiento. En esta nueva situación, la ecuación es
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x-100)(200-x) + t.$$
   Considerando como dato inicial $x(0) = 180$, hallar el número aproximado de individuos para $t = 1$ usando el método de Euler con paso $h = 0'5$.

6. Consideramos la ecuación diferencial
$$x' = \frac{tx}{1+t^2} \qquad \text{con } x(0) = 1.$$

   a) Utiliza el método de Euler para calcular el valor aproximado de la solución en los t de la forma: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

   b) Resuelve la ecuación; compara los valores obtenidos en el apartado anterior con los de la solución exacta correspondiente.

7. La función $x = f(t) = x(t)$ verifica que $x' = x^2 - 2t$ con $x(0) = 2$. Hallar $f(t)$, aproximadamente, mediante el polinomio de Taylor de grado 3.

8. Se considera el problema de valores iniciales $x' = \log(t+x)$ con $x(0) = 5$.

   a) Utilizar el método de Euler con paso $h = 0'1$ para aproximar $x(0'5)$.

   b) Encontrar el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor del punto 0 de la solución $x(t)$ de nuestro problema de valores iniciales. Comparar el valor en $0'5$ con la aproximación obtenida en el apartado anterior.

9. $x(t)$ representa el nivel de cierto contaminante en un río a lo largo del tiempo (en años). Se observa que, durante los primeros años, la ley que rige la evolución de este contaminante viene dada, aproximadamente, por
$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{x^2}{50} + t.$$
Inicialmente, $x(0) = 10$.

   a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $t = 0$ de la solución $x(t)$.

   b) Hallar el nivel aproximado del contaminante al cabo de 2 años, usando el apartado anterior.

10. Al comienzo de cierto año, se tienen censados 540 gamos en el Monte de El Pardo. El ritmo de aumento natural anual de la población es del 12%; para evitar un crecimiento descontrolado, se abaten todos los años 40 gamos.

   a) Plantear la variación anual del tamaño de la población en función del tiempo (dN/dt), y obtener $N(t)$ a partir de esta ecuación diferencial.

   b) ¿Cuál sería el número aproximado de gamos al cabo de 20 años si este plan se lleva a cabo?