

CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Escribe las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = 2x^2 + y^2 - xy - 5y + 5$ en los puntos $(1, 2, -1)$ y $(0, 2, -1)$.
2. Escribe la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2y - 3xy^2 + 2xy$ en el punto $(2, 1, 2)$.
3. Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.
 - a. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$.
 - b. $xy^2 + 2x^2y - 6xy$.
 - c. $(x^2 + y^2) \exp(x + y)$.
 - d. $2y + \log|x^2 + 2xy|$.
4. Halla un vector normal y otro tangente a la curva $2x^3 - x^2y^2 = 3x - y - 7$ en el punto $P = (1, -2)$, y escribe ecuaciones de las rectas normal y tangente a esa curva en ese punto.

OPTIMIZACIÓN

5. Necesitamos construir cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa (sólo una) de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta un céntimo, cada cm^2 de plástico cuesta tres céntimos, y las cajas deben tener una capacidad de $2,000 \text{ cm}^3$. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata posible?
6. Queremos construir un canal para el riego con una sección trapezoidal regular. La capacidad de servicio del canal será proporcional al área de su sección y su coste de construcción será proporcional al llamado *perímetro húmedo*: la longitud total de los lados y fondo de la sección del canal (que NO tiene techo).
Formula el problema de: *minimizar el coste del canal para una sección dada*.
Para la elección de las variables hay muchas posibilidades, pero algunas conducen a fórmulas mucho más manejables que otras. Una variable muy recomendable es el ángulo que forman las paredes laterales con la dirección vertical.
7. Se pretende excavar un agujero cilíndrico en el suelo que tenga 1 m^3 de volumen. El coste de la excavación es proporcional a $A(1 + p^2)$, siendo p la profundidad y A el área (circular) excavada.
 - a. Escribe como función de las dos variables r y p (siendo r el radio del cilindro), la fórmula del coste. Escribe también la fórmula de la restricción a la que estas dos variables están sujetas.
 - b. Escribe las ecuaciones que deben cumplir los valores r y p que den el coste mínimo.
 - c. Halla estos valores de r y p que dan el coste mínimo.
8. Se quiere construir un cilindro de eje vertical de volumen V fijo de forma que el material utilizado tenga coste mínimo. Resulta que el material utilizado para las paredes laterales cuesta el doble que el material utilizado para el fondo y que el material utilizado para la tapa cuesta el triple que el utilizado para el fondo. Queremos calcular cuales son las dimensiones r (radio del cilindro) y h (altura del cilindro) que proporcionan el resultado óptimo.
 - a. Escribe en forma de ecuación la restricción a la que están sujetas r y h .
 - b. Escribe la fórmula de la función $C(r, h)$ que hay que optimizar.
 - c. Calcula, finalmente, la relación que debe existir entre las variables r y h para optimizar el resultado.
9. ¿Qué dimensiones debe tener una caja de volumen 1 para que su superficie lateral sea mínima?
10. Halla el volumen máximo de una caja en la que la suma de las longitudes de sus aristas es 1.

EJERCICIOS VARIADOS DE REPASO

- 11.** La variable X representa el número de llamadas que recibe una centralita de teléfonos cada media hora, que suponemos sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 3'5$.
- Halla la probabilidad de que no se produzcan llamadas en la próxima media hora.
 - Halla la probabilidad de que se reciban al menos dos llamadas en la próxima media hora.
 - Halla la probabilidad de que lleguen al teléfono entre tres y cinco llamadas.
 - ¿Cuál es el número esperado de llamadas al teléfono en media hora?
- 12.** El peso de los atletas de pruebas de medio fondo sigue una distribución normal con media 64'3 Kg. y desviación típica de 2'3 Kg. Halla un intervalo centrado en la media que contenga
- el 68'3 % de la población;
 - el 95'5 % de la población;
 - el 99'7 % de la población.
- 13.** Un examen consta de quince preguntas que presentan cuatro posibles respuestas cada una. Una persona, sin conocimientos sobre la materia del examen, responde las cuestiones al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al contestar una pregunta dada?
 - Halla la probabilidad de que dicha persona no conteste bien a ninguna cuestión. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien al menos una pregunta?
 - Halla la probabilidad de que responda bien a todas las preguntas.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien a más de la mitad de las preguntas?
- 14.** Se sabe que el 40 % de los habitantes de una cierta ciudad consumen diariamente café.
- Preguntamos a una persona elegida al azar si toma café todos los días. Construimos la variable aleatoria X_1 que vale 1 si la respuesta es afirmativa y 0 en caso contrario. Halla la media y la desviación típica de X_1 .
 - Encuestamos a veinte personas sobre su consumo diario de café; X es la variable «número de entre ellas que consumen café cada día». Halla la media μ y la desviación típica σ de X . Halla la probabilidad de que valor de X sea igual a la media. Halla la probabilidad de que el valor de X esté en el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.
- 15.** Encontrar los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- 16.** La evolución de una población con dos clases de edades viene dada por la matriz de Leslie $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0'9 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula los autovalores y deduce con qué tasa crece esta población. ¿Cuál será la proporción de cada población a largo plazo? Si se tratara de la población mensual de animales en una granja ¿cuántos individuos jóvenes podríamos sacrificar cada mes de modo que la población siga creciendo?
- 17.** En cierto bosque mediterráneo, durante el verano el riesgo de incendio puede ser medio o alto. Si un día es de alto riesgo hay un tercio de probabilidades de siga siéndolo al día siguiente. Por el contrario, si un día es de riesgo medio, la probabilidad de que al día siguiente continúe el riesgo medio es del 80%. A largo plazo, qué proporción de días serán de riesgo alto y riesgo medio.