Análisis Matemático I — Curso 2006-2007.
1 Ingeniería Informática

Hoja 1: Fundamentos

1.– Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $|x+1| > 3$,

(ii) $|2x+1| < 1$,

(iii) $|x-1| \leq |x+1|$,

(iv) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(v) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(vi) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(vii) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(viii) $|(x-2)(x-3)| < 1$,

(ix) $|x-1| + |x-2| > 1$,

(xii) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

2.– Demostrar los siguientes enunciados:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$,

(ii) $|x^2| = |x|^2$,

(iii) $|x-y| \leq |x| + |y|$,

(iv) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Indicación. En (iv) probar que $|x-y| \geq |x| - |y|$ y $|x-y| \geq |y| - |x|$.

3.– Sean a y b dos números no negativos con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

4.– Demostrar por inducción.

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$.

(iii) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

(iv) $n! \leq n^n$.

(v) Para todo $n \geq 10$ se tiene que $2^n \geq n^3$.

(vi) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

(vii) $1 + 1\cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)\,(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

5.– Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1.$$

Indicación. Demostrar primero que $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$.

6.– Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

7.– Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1$$

.

8.– Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(i) $A = \{x : x^2 < 4\}$,

(ii) $B = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(iii) $C = \{x : x^2 \leq 4\}$,

(iv) $D = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$,

(v) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(vi) $F = E \cup \{0\}$,

(vii) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(viii) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 3\}$.

9.– Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

10.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11.– Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B) + \epsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.