

Hoja 3: Límites y Derivadas

1.- Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x^4 + x^3} & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x} & (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{3 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^5 x} \\
 (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} & (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{[x]}} & (f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^4 + x^2 + 1)}{\log(x^{10} + x^7 + 100)} \\
 (g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{2x-1} & (h) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + x 2^x}{2 + x 3^x} \right)^{\frac{1}{x}} & (i) \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}} \\
 (j) \lim_{x \rightarrow 0^+} |\operatorname{sen} x|^{\frac{1}{\log x}} & (k) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}} & (l) \lim_{x \rightarrow \infty} (7x + 5x^4)^{\frac{1}{6+2 \log(2x+1)}}
 \end{array}$$

2.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll}
 (a) y = \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & (b) y = \operatorname{sen}(\log x) & (c) y = \log(x^2 \log^3 x) \\
 (d) y = x^{\tan(2\pi x)} & (e) y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x^2 - 1} & (f) y = \operatorname{arctan} \sqrt{x^2 - 1} \\
 (g) y = x^{x^{\cos x}} & (h) y = x^{\log x} & (i) y = (\log x)^x \\
 (j) y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} & (k) y = \tan(x^2 + \log x + \operatorname{arctan} x) & (l) y = 2^{\sec(x^3 + 7x - 10)} \\
 (m) y = \sec(\operatorname{cosec} x) & (n) y = (x^2 + 1)^{e^x} & (o) y = \sqrt[5]{\cotan^8(x^2)} \\
 (p) y = x^{\frac{1}{x}} & (q) y = \log_x e^x & (r) y = e^{e^x}
 \end{array}$$

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

$$\begin{array}{lll}
 (a) f(x) = x^{\frac{1}{3}} & (b) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x & (c) f(x) = \frac{x^3}{|x|} \\
 (d) f(x) = 2^{-\frac{1}{|x|}} & (e) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} & (f) f(x) = \log |x| \\
 (g) f(x) = \log \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) & (h) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & (i) f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}
 \end{array}$$

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si } x > 2. \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si } |x| \leq 2, \\ \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x & \text{si } x \leq 0, \\ b - x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ c \cdot \operatorname{arctan} x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si } x \leq 0, \\ a + b \cdot x & \text{si } 0 < x < 2, \\ c \cdot e^{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**5.-** Probar que si  $y = f(x)$  es derivable en  $x = a$  y  $f(a) \neq 0$  entonces  $y = |f(x)|$  es derivable en  $x = a$ .

**6.-** ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función  $f(x) = |x|^3$ ? Calcularlas. Hacer lo mismo con  $g(x) = x|x|$ .

**7.-** Calcular el valor máximo y mínimo de la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  en el intervalo  $[-2, 6]$ .

**8.-** Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

**9.-** Una empresa de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo  $V$ . ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base  $R$  y la altura de la lata  $h$ , para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?.

**10.-** Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

(a)  $1 + x \leq e^x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\log(1 + x) < x$ , para todo  $x > 0$ .

**11.-** Demostrar que la ecuación  $x^3 - 3x + k = 0$ , con  $k \in \mathbb{R}$ , tiene a lo sumo una solución en  $[-1, 1]$ . ¿Para que valores de  $k$  existe efectivamente la solución?.

**12.-** Demostrar que la ecuación  $6x^4 - 7x + 1 = 0$  no tiene más de dos raíces reales distintas.

**13.-** Demostrar que la ecuación  $6x^5 + 13x + 1 = 0$  tiene exactamente una raíz real.