ANÁLISIS MATEMÁTICO I (1º INGENIERÍA INFORMÁTICA) Febrero 2007

Nombre y DNI: **Grupo:**

SOLUCIONES

....

1.- (a) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3(2^n)}{7^n}$ es convergente y calcular su suma.

(b) Estudiar el caracter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a+\frac{1}{n})^n$ según los valores del parámetro $a > 0$.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3\cdot 2^n}{7^n} = 5 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}} + 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n}$$

series geométricas con razón <1 $\Rightarrow$ convergentes

$$= 5 \cdot \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + 3 \cdot \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}} = 5 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{61}{30} //$$

(b) Por el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a+\frac{1}{n}\right) = a \Rightarrow \begin{cases} a>1 \Rightarrow \text{DIV} \\ a<1 \Rightarrow \text{CONV} \\ a=1 \Rightarrow \underline{\text{DUDA}} \end{cases}$$

Considerando aparte el caso $\boxed{a=1}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \ \underline{\text{DIVERGE}}.$$

2.- Dada una constante $a > 1$, se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida recurrentemente por:

$$x_1 = a, \quad \text{y} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(a) Demostrar que $x_n \geq \sqrt{a}$.
(b) Demostrar que la sucesión es monótona decreciente.
(c) Justificar la existencia del $\lim_{n\to\infty} x_n$ y calcular su valor.

(a) $x_1 = a \geq \sqrt{a} \iff a > 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a} \iff \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \geq \sqrt{a}$$

$$\iff x_n^2 + a \geq 2x_n\sqrt{a} \iff (x_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$$

lo cual es cierto.

(b) $x_{n+1} \leq x_n \iff \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq x_n$

$$\iff \frac{a}{2x_n} \leq \frac{x_n}{2} \iff a \leq x_n^2$$

$\iff \sqrt{a} \leq x_n$, lo cual es cierto por (a).

(c) Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada inferiormente (por (a)) y decreciente (por (b)), entonces $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = L$.

Tomando límites en $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right) \Rightarrow L = \frac{L^2 + a}{2L}$$

$$\Rightarrow 2L^2 = L^2 + a \Rightarrow L^2 = a \Rightarrow \boxed{L = +\sqrt{a}}$$

Nombre y grupo: ....

3.- Representar la gráfica de la función $y = x - 3 + \frac{1}{x-2}$, indicando su dominio, asíntotas, extremos relativos, concavidad y convexidad.

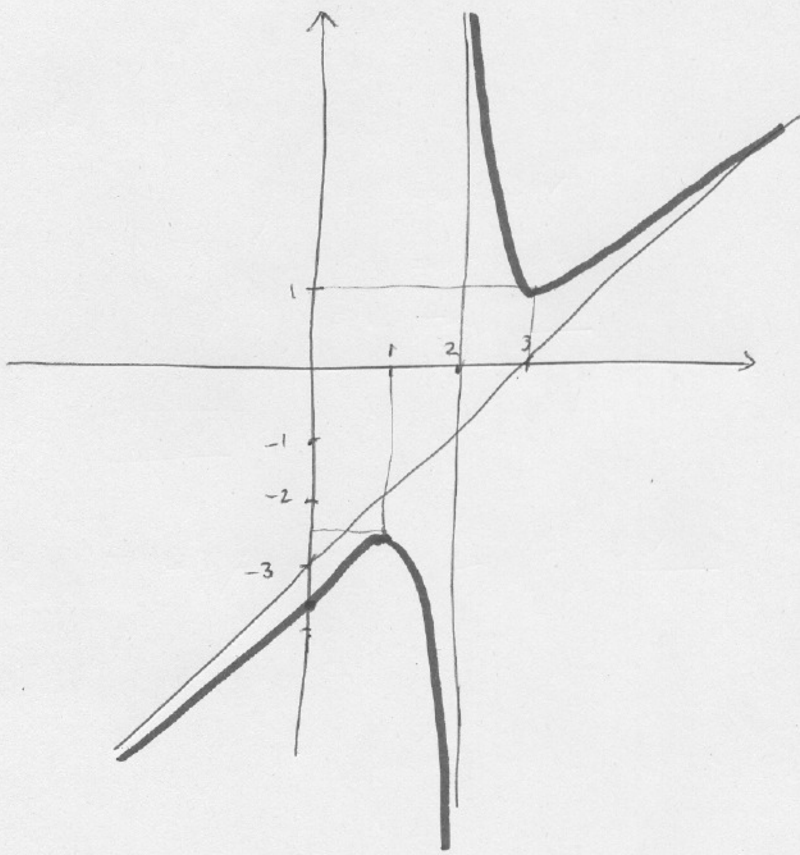
(i) Dominio y ptos corte con ejes

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $x = 0 \to y = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$
- $y = 0 \to x - 3 = \frac{-1}{x-2} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = -1$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-28}}{2} \to \text{no hay}$$

(ii) Asíntotas

- Vertical: $x = 2$
- Oblicua: $y = x - 3$



(iii) Extremos

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x - 2 = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 3 & \boxed{\text{MÍN}} \to f(3) = 1 \\ 1 & \boxed{\text{MÁX}} \to f(1) = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
CRECIMIENTO	↗	↘	↘	↗

(iv) Convexidad

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \begin{cases} \oplus \text{ en } (2,\infty) \\ \ominus \text{ en } (-\infty,2) \end{cases}$$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
CVX	⌒	⌣

Nombre y grupo: ....

4.- (a) Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

(b) Escribir $F(x) = \displaystyle\int_3^{sen^3 x + e^{-x^2}} (2-5t)\,dt$ como composición de dos funciones, y calcular $F'(x)$.

(c) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{x}$.

(a) Si $f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en (a,b)

y además $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$

NOTA: Acompañando el enunciado anterior, se puede incluir la "Regla de Barrow":

si g derivable en (a,b) y $g' \in R[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a)$

(b) Llamo $f(x) = \int_3^x (2-5t)\,dt$, $g(x) = sen^3 x + e^{-x^2}$

$\Rightarrow F(x) = f(g(x)) \xRightarrow[\text{regla cadena}]{\text{TFC +}} F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

Por tanto, $F'(x) = (2 - 5g(x)) \cdot g'(x)$

$= (2 - 5\,sen^3 x - 5e^{-x^2}) \cdot (3\,sen^2 x \cos x - 2x e^{-x^2})$.

(c) Como $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ es derivable y $f(0) = 0$,

por la Regla de L'Hôpital (o la definición de derivada)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = e^{-t^2}\Big|_{t=0} = 1$$