ANÁLISIS MAT. I (1º INGENIERÍA INFORMÁTICA) **Examen parcial** 24/11/06

**Nombre y DNI:** **Grupo:**

.....................................................................................................................................

1.- Demostrar por inducción

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

NOTA: 2 puntos

- $n=1$ , $\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$

- Suponer cierto para $n=k$.

- Veamos el caso $n=k+1$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+ \text{—} +\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}} \overset{\text{H.I.}}{=} 2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$=2-\frac{2k+4-(k+1)}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

2.- Encontrar números reales $a$ y $b$ para que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + a \operatorname{sen} x + b \tan x}{x^5} < \infty .$$

¿Qué valores puede tomar el límite?

NOTA: 3 puntos

Procediendo por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + a \operatorname{sen} x + b \tan x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + a\cos x + \frac{b}{\cos^2 x}}{5x^4}$$

Exigiendo a este límite que sea de tipo $\frac{0}{0} \Rightarrow \boxed{1 + a + b = 0}$

De nuevo L'Hôpital nos da

$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{-a \operatorname{sen} x + 2b \cos^{-3} x \operatorname{sen} x}{20x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \,(-a + 2b\cos^{-3} x)}{20x^3}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \sim 1\right) \rightarrow = \lim_{x\to 0} \frac{-a + 2b\cos^{-3} x}{20x^2}$$

Exigiendo de nuevo el tipo $\frac{0}{0} \Rightarrow \boxed{-a + 2b = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{b = -1/3}, \quad \boxed{a = -2/3}$$

Con estos valores el último límite toma la forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{3} \frac{1 - \cos^{-3} x}{20x^2} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \frac{1}{30} \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos^{-4} x \operatorname{sen} x}{2x}$$

$$\underset{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \sim 1}{=} -\frac{3}{60} = -\frac{1}{20} \quad //.$$

NOTA: Extraído de [Bilbao et al, p. 279]

**Nombre y grupo:** ..........................................................................................................

3.- (a) Definición de continuidad de una función $f$ en un punto $a$.

(b) Demostrar que una función definida en $\mathbb{R}$ verificando $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y que es continua en cero, es continua en cualquier otro punto.

NOTA: 3 puntos

$\boxed{(a)}$ Podemos dar 3 definiciones equivalentes de continuidad en a

(i) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ y coincide con $f(a)$

(ii) $\exists \lim_{h \to 0} f(a+h)$ y coincide con $f(a)$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$ $\left. \begin{array}{l} |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \end{array} \right\}$.

$\boxed{(b)}$

Sabemos

(I) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(II) $f$ es cont en $a=0$.

De (I) sigue que $f(0) = 0$ $\quad (*)$

De (II) sigue que $\lim_{h \to 0} f(h) = 0$ $\quad (**)$

Tenemos que ver que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Usando las propiedades anteriores,

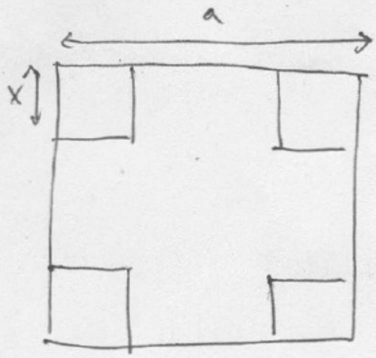
$$\lim_{h \to 0} f(a+h) \overset{(I)}{=} \lim_{h \to 0} (f(a) + f(h)) = \left(\lim_{h \to 0} f(h)\right) + f(a)$$

$$\overset{(**)}{=} 0 + f(a) = f(a)$$

$\boxtimes$

4.- De las esquinas de un cartón cuadrado se quitan cuatro cuadrados iguales para hacer con el resto del cartón una caja cuyo volumen se quiere maximizar. Calcular las dimensiones de la caja si el lado del cartón original es $a$.

NOTA: 2 puntos

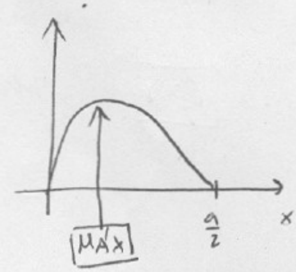



$$V(x) = (a-2x)^2 x$$

$$V'(x) = (a-2x)^2 + 2(a-2x)(-2)x$$

$$= (a-2x)(a-2x-4x)$$

$$= (a-2x)(a-6x) = 0 \iff x = \frac{a}{2} \text{ ó } x = \frac{a}{6}$$




Como $\left.\begin{array}{l} V' > 0 \text{ en } (0, \frac{a}{6}) \\ V' < 0 \text{ en } (\frac{a}{6}, \frac{a}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{6}$ es MÁX LOCAL

(y tb global en $[0, \frac{a}{2}]$)

$\Rightarrow$ la caja tendrá dimensiones $\frac{a}{6} \times \frac{2a}{3} \times \frac{2a}{3}$

y volumen $\frac{2}{27} a^3$.

NOTA: Extraído de [Bilbao et al., p.344]